

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
Faculté de génie
Département de génie mécanique

**CALCUL DE LA RÉPONSE D'UNE STRUCTURE
SOUMISE À UNE EXCITATION ALÉATOIRE**

Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées
Spécialité : génie mécanique

François JUBINVILLE

Sherbrooke (Québec), CANADA

décembre 2000



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-74408-6

Canada

Remerciements

Plusieurs personnes ont contribué à ce projet de maîtrise et je tiens sincèrement à les remercier :

- **Mon directeur de maîtrise, François Charron, et Louis Donato, ingénieur chez Maya Heat Transfer Technologies, pour leur disponibilité, leur professionnalisme et leurs nombreux conseils et encouragements. Le plaisir que ce projet de recherche m'a procuré leur est grandement attribuable.**
- **L'entreprise Maya Heat Transfer Technologies pour le soutien financier qui m'a été accordé pour effectuer cette maîtrise, ainsi que pour les ressources informatiques et l'espace de travail qui ont été mis à ma disposition.**
- **Mes parents, Jacques et Lucie, qui depuis toujours m'encouragent et me soutiennent dans tous les projets que j'entreprends. Je leur dois en grande partie ce que je suis devenu aujourd'hui.**
- **Ma copine Tanya, pour son amour et son support.**

Table des matières

CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 LE CONTEXTE DU PROJET.....	2
1.2 LA MÉTHODE GÉNÉRALE DE CALCUL EN ANALYSE ALÉATOIRE	4
1.3 PLAN DU MÉMOIRE.....	5
CHAPITRE 2 ÉTAT DES CONNAISSANCES.....	6
2.1 INTRODUCTION	6
2.2 EXCITATION HARMONIQUE D'UNE STRUCTURE À PLUSIEURS DDL.....	8
2.2.1 Méthode de résolution directe	10
2.2.2 Méthode de superposition modale	12
2.3 EXCITATION ALÉATOIRE.....	20
2.3.1 Analyse aléatoire et analyse transitoire	20
2.3.2 Concepts et théories de l'analyse des vibrations aléatoires des structures.....	21
2.3.3 Réponse d'un système à un DDL excité aléatoirement	22
2.3.4 Réponse d'un système à plusieurs DDL excité aléatoirement	25
2.3.5 Méthode d'intégration de la DSP.....	30
2.4 CALCUL DE LA RÉPONSE ASSOCIÉE À UNE PROBABILITÉ SPÉCIFIQUE	32
2.5 CONCLUSION	33
CHAPITRE 3 OBJECTIFS DU PROJET	34
3.1 OBJECTIF GÉNÉRAL.....	34
3.2 OBJECTIFS SPÉCIFIQUES	34
3.3 HYPOTHÈSES FORMULÉES	36
3.4 MÉTHODOLOGIE RETENUE.....	37

CHAPITRE 4 CONCEPTION DE L'ALGORITHME	39
4.1 INTRODUCTION	39
4.2 DONNÉES PRÉLIMINAIRES.....	39
4.2.1 Fichier usager	40
4.2.2 Analyse modale	42
4.2.3 Programmation dans MSC/NASTRAN - DMAP	42
4.3 CALCUL DE LA VALEUR EFFICACE DES VARIABLES.....	43
4.3.1 Méthode d'intégration numérique.....	44
4.3.2 Méthode d'intégration analytique	51
4.4 CALCUL DE LA VALEUR EFFICACE DE LA CONTRAINTE DE VON MISES.....	56
4.4.1 Problématique du calcul de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire ...	56
4.4.2 Méthode de Monte-Carlo	57
4.4.3 Méthode de <i>Segalman</i>	63
4.4.4 Calcul des marges de sécurité.....	70
4.5 MÉTHODE DE SEGALMAN APPLIQUÉE AU CALCUL DES VALEURS EFFICACES DES VARIABLES LINÉAIRES	70
4.5.1 Calcul des valeurs efficaces de la vitesse et de l'accélération	71
4.5.2 Ajout de la contribution associée aux modes de corps rigides.....	72
4.5.3 Ajout de la contribution associée à la flexibilité résiduelle	73
4.5.4 Avantages et désavantages de la méthode.....	74
4.6 MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE AMÉLIORÉE.....	75
4.6.1 Avantages de la méthode.....	77
4.7 VISUALISATION DES RÉSULTATS	78
4.7.1 Valeurs efficaces ou associées à une probabilité	78
4.7.2 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse.....	80
4.8 CONCLUSION	81

CHAPITRE 5 RÉSULTATS	83
5.1 INTRODUCTION	83
5.2 MÉTHODOLOGIE	84
5.2.1 Modèle utilisé pour la validation des résultats.....	84
5.2.2 Méthodes alternatives de validation.....	91
5.3 VALIDATION DU CALCUL DES VALEURS EFFICACES	93
5.3.1 Résultats obtenus par intégration analytique	98
5.3.2 Résultats obtenus par intégration numérique.....	103
5.3.3 Résultats obtenus par la méthode d'intégration numérique améliorée	106
5.3.4 Comparaison entre les valeurs analytiques et numériques	110
5.4 VALIDATION DU CALCUL DE LA CONTRAINTE DE VON MISES.....	113
5.4.1 Comparaison de la valeur de la contrainte de von Mises	113
5.4.2 Méthode la plus appropriée	116
5.5 CONCLUSION	116
CHAPITRE 6 LIMITES DU CODE	118
CONCLUSION.....	119
PERSPECTIVES	121
ANNEXE	
A FICHIER USAGER TYPE.....	124

Table des figures

Figure 1.1 Exemple d'une partie du fichier d'entrée de MSC/NASTRAN	2
Figure 1.2 Exemple d'un fichier contenant les résultats générés par MSC/NASTRAN lors d'une analyse aléatoire	3
Figure 2.1 Classement des phénomènes physiques	7
Figure 2.2 Échantillons d'une même excitation aléatoire	7
Figure 2.3 Excitation aléatoire dans le domaine temporel	20
Figure 2.4 Exemple d'une fonction de densité de probabilité type de la contrainte de von Mises	29
Figure 2.5 Exemple type d'une densité spectrale de puissance de la réponse	30
Figure 4.1 Exemple d'une partie du fichier usager utilisé par l'algorithme développé	41
Figure 4.2 Méthode de projection type appliquée aux facteurs de participation modale	48
Figure 4.3 Exemple type d'une DSP d'excitation	54
Figure 4.4 Exemple type d'une partie d'un fichier ASCII généré par l'algorithme	79
Figure 4.5 Exemple type d'une page HTML créée par l'algorithme	81
Figure 5.1 Modèle utilisé pour la validation de l'algorithme	85
Figure 5.2 Densité spectrale de puissance de l'excitation : amplitude constante	87
Figure 5.3 Densité spectrale de puissance de l'excitation : amplitude variable	87
Figure 5.4 Amplification modale utilisée pour fin de validation	88
Figure 5.5 Densité spectrale de puissance de l'excitation utilisée lorsque la flexibilité résiduelle est retenue : amplitude constante	90
Figure 5.6 Densité spectrale de puissance de l'excitation utilisée lorsque la flexibilité résiduelle est retenue : amplitude variable	90
Figure 5.7 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 1)	94
Figure 5.8 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 2)	95

Figure 5.9 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 3)	96
Figure 5.10 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 4)	97

Liste des tableaux

Tableau 3.1 Résultats élémentaires associés à chacun des éléments.....	35
Tableau 5.1 Densité spectrale de l'excitation pour le cas sans flexibilité résiduelle.....	88
Tableau 5.2 Table des facteurs d'amplification modale.....	89
Tableau 5.3 Densité spectrale de l'excitation pour le cas avec flexibilité résiduelle.....	91
Tableau 5.4 Valeurs efficaces obtenues par intégration analytique (amplitude variable de la DSP de l'excitation)	99
Tableau 5.5 Valeurs efficaces obtenues par intégration analytique (amplitude constante de la DSP de l'excitation).....	100
Tableau 5.6 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration analytique (amplitude variable de la DSP de l'excitation)	101
Tableau 5.7 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration analytique (amplitude constante de la DSP de l'excitation)	101
Tableau 5.8 Moyenne des valeurs absolues des écarts relatifs obtenues avec la méthode d'intégration analytique.	102
Tableau 5.9 Valeurs efficaces obtenues par intégration numérique (amplitude variable de la DSP de l'excitation)	103
Tableau 5.10 Valeurs efficaces obtenues par intégration numérique (amplitude constante de la DSP de l'excitation)	104
Tableau 5.11 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration numérique (amplitude variable de la DSP de l'excitation)	105
Tableau 5.12 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration numérique (amplitude constante de la DSP de l'excitation)	105
Tableau 5.13 Moyenne des valeurs absolues des écarts relatifs obtenues avec la méthode d'intégration numérique.	106
Tableau 5.14 Valeurs efficaces obtenues par la méthode d'intégration numérique améliorée (amplitude variable de la DSP de l'excitation).....	107

Tableau 5.15 Valeurs efficaces obtenues par la méthode d'intégration numérique améliorée (amplitude constante de la DSP de l'excitation).....	108
Tableau 5.16 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration numérique améliorée (amplitude variable de la DSP de l'excitation).....	109
Tableau 5.17 Valeurs efficaces, avec flexibilité résiduelle, obtenues par intégration numérique (amplitude constante de la DSP de l'excitation)	109
Tableau 5.18 Moyenne des valeurs absolues des écarts relatifs obtenues avec la méthode d'intégration numérique améliorée.	110
Tableau 5.19 Temps moyens de calcul de diverses méthodes en fonction du type d'excitation	112
Tableau 5.20 Comparaison des valeurs de la contrainte de von Mises associées à une probabilité de 99,87%.....	114
Tableau 5.21 Valeur absolue des écarts relatifs entre les valeurs de contraintes de von Mises obtenues par les différentes méthodes.	115
Tableau 5.22 Performances des méthodes de Monte-Carlo et Segalman	116

Résumé

L'analyse par la méthode des éléments finis des structures linéaires déterministes soumises à une excitation aléatoire est le sujet de ce projet de maîtrise. L'excitation utilisée pour ce projet est une accélération aléatoire de type stationnaire et *ergodique* devant s'exercer dans une seule direction et à un seul endroit à la fois, soit à la base de la structure¹. Le comportement dynamique de celle-ci est modélisé par une approche modale dont les paramètres nécessaires, soient les modes propres et les fréquences naturelles, sont préalablement calculés par le logiciel d'éléments finis MSC/NASTRAN. En ce qui concerne l'amortissement, celui-ci est modélisé comme étant du type modal visqueux.

L'algorithme développé dans ce projet permet de calculer les valeurs efficaces (communément appelées valeurs RMS) et celles associées à une probabilité spécifiée par l'utilisateur des résultats suivants:

- déplacements
- vitesses
- accélérations
- forces aux nœuds
- forces associées aux conditions frontières
- forces associées aux conditions de cinématique
- forces élémentaires
- contraintes élémentaires
- déformations élémentaires
- contraintes élémentaires de von Mises

¹ Dans ce document, la base de la structure se rapporte à l'endroit où l'accélération aléatoire est appliquée. Ce point peut être considéré comme étant encastré selon les six degrés de liberté dans la source d'excitation.

L'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse, étape indispensable permettant d'obtenir la valeur efficace de la quantité recherchée, peut s'effectuer à l'aide d'une méthode analytique, d'une méthode numérique ou d'une méthode numérique améliorée. Ces trois méthodes sont reconnues pour leur efficacité et leur rapidité de calcul, selon la forme de l'excitation utilisée.

Comme le calcul de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire ne peut s'exécuter par la méthode générale, sa valeur est calculée en utilisant une méthode de type Monte-Carlo ainsi que d'une autre méthode récente et performante. Le calcul des contraintes de von Mises permet à l'algorithme d'évaluer les marges de sécurité associées aux éléments afin de vérifier l'intégrité de la structure étudiée.

Finalement, les résultats calculés peuvent être visualisés par l'intermédiaire d'un fichier ASCII, d'un outil HTML ou par le logiciel I-DEAS.

Chapitre 1

Introduction

Au début de la deuxième guerre mondiale, l'analyse du comportement dynamique des structures d'avions constituait une étape importante dans leur conception. À cette époque, tous les tests s'effectuaient en utilisant une excitation sinusoïdale, car les vibrations engendrées par les moteurs à pistons des avions étaient majoritairement périodiques. Cette procédure d'analyse fut largement utilisée jusqu'au début des années cinquante. Par la suite, l'analyse sinusoïdale s'est révélée inadéquate lors du développement des avions propulsés par des moteurs à réaction, des fusées et des satellites. Les données vibratoires reçues par télémétrie lors des expérimentations indiquaient que la nature des accélérations mesurées n'était plus périodique, mais en grande partie aléatoire. De ces constatations sont nés les concepts et les techniques de l'analyse des structures excitées aléatoirement.

De nos jours, l'évaluation du comportement d'une structure en fonction des sollicitations auxquelles elle sera soumise demeure une étape essentielle lors de sa conception. Dans plusieurs cas rencontrés en ingénierie, cette sollicitation prendra la forme d'un chargement dynamique aléatoire appliqué à la base de la structure. Les phénomènes physiques impliquant ce type d'excitation sont nombreux, les plus connus et les plus communs étant sans aucun doute les tremblements de terre.

1.1 Le contexte du projet

Les ingénieurs ont souvent recours à la méthode des éléments finis afin de prédire le comportement dynamique de structures complexes soumises à divers types de sollicitations. Cette méthode numérique, couplée à la puissance de calcul des ordinateurs, a complètement révolutionné la résolution des problèmes rencontrés en ingénierie. De nombreux codes d'éléments finis actuellement disponibles sur le marché ont la capacité d'effectuer des analyses de structures soumises à des vibrations aléatoires. Par contre, leur utilisation est souvent laborieuse et les résultats qu'ils génèrent sont pour la plupart du temps dans un format qui rend l'interprétation difficile.

Le logiciel d'éléments finis MSC/NASTRAN, originellement développé par la NASA durant les années soixante, est un pionnier de cette méthode d'analyse. Dans le domaine de l'aéronautique et de l'aérospatiale, ce logiciel est prédominant en ce qui a trait à l'analyse structurale. Il permet aussi de calculer la réponse dynamique d'une structure excitée aléatoirement, mais d'une façon relativement exigeante. La figure 1.1 illustre une des principales difficultés que rencontre l'utilisateur, c'est-à-dire celle de spécifier individuellement tous les résultats auxquels il est intéressé à en connaître la réponse, comme les accélérations nodales et les contraintes élémentaires.

```
XYPLOT ACCE PSDF /68062(T1)
XYPLOT ACCE PSDF /68062(T2)
XYPLOT ACCE PSDF /68062(T3)
$CHEXA
XYPEAK STRESS PSDF /50390(6)
XYPEAK STRESS PSDF /50390(7)
XYPEAK STRESS PSDF /50390(8)
XYPEAK STRESS PSDF /50390(9)
XYPEAK STRESS PSDF /50390(10)
XYPEAK STRESS PSDF /50390(11)
$CQUAD4
XYPEAK STRESS PSDF /40179(3)
XYPEAK STRESS PSDF /40179(5)
XYPEAK STRESS PSDF /40179(7)
XYPEAK STRESS PSDF /40179(10)
XYPEAK STRESS PSDF /40179(12)
XYPEAK STRESS PSDF /40179(14)
```

Cette ligne demande le calcul de la valeur efficace de la composante de contrainte numéro 8, qui pour un CHEXA représente la contrainte σ_{xx} , associée à l'élément 50390.

Figure 1.1 Exemple d'une partie du fichier d'entrée de MSC/NASTRAN

Cette opération est si fastidieuse que des programmes informatiques indépendants sont parfois créés par les utilisateurs de MSC/NASTRAN afin de faciliter la génération de cette liste.

De plus, MSC/NASTRAN n'est pas conçu pour calculer les valeurs efficaces des déformations, des forces aux nœuds (grid point forces) et des forces associées aux conditions de cinématique (MPC) lorsque l'excitation est aléatoire. Il ne permet pas davantage de calculer les valeurs efficaces de la contrainte de von Mises malgré le fait que ce critère d'effondrement soit très utilisé dans le domaine de l'ingénierie pour déterminer la capacité d'une structure à résister au chargement qui lui est imposé.

Comme le démontre la figure 1.2, les valeurs efficaces des résultats générés par MSC/NASTRAN sont sous une forme qui rend l'analyse très complexe. Ils sont transmis par l'intermédiaire d'un seul tableau contenant l'ensemble des résultats spécifiés par l'utilisateur. Les éléments ne sont identifiés que par leur numéro, leur type n'étant mentionné nul part. Le même phénomène se produit pour chacune des composantes de force, de contrainte ou de déformation, celles-ci n'étant identifiées que par un chiffre et non par leur nom.

X Y - O U T P U T S U M M A R Y (A U T O O R P S D F)												
0	PLOT	CURVE	FRAME		RMS	NO. POSITIVE	XMIN FOR	XMAX FOR	YMIN FOR	X FOR	YMAX FOR	X FOR*
0	TYPE	TYPE	NO.	CURVE ID.	VALUE	CROSSINGS	ALL DATA	ALL DATA	ALL DATA	YMIN	ALL DATA	YMAX
0	PSDF	ACCE	22	24081(3)	1.889552E+05	9.800247E+02	2.000E+01	2.000E+03	2.019E-01	2.000E+01	4.327E+08	7.154E+02
0	PSDF	ACCE	23	24081(4)	7.564161E+04	8.291319E+02	2.000E+01	2.000E+03	1.252E-01	2.000E+01	6.206E+07	5.534E+02
0	PSDF	ACCE	24	24081(5)	2.080776E+05	8.808106E+02	2.000E+01	2.000E+03	3.745E+05	1.851E+03	1.991E+08	7.106E+02
0	PSDF	ACCE	25	30712(3)	3.550912E+05	7.135862E+02	2.000E+01	2.000E+03	2.467E+00	2.000E+01	2.265E+09	4.960E+02
0	PSDF	ACCE	26	30712(4)	2.040318E+06	7.077768E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.159E+01	2.000E+01	8.839E+10	4.961E+02
0	PSDF	ACCE	27	30712(5)	1.838153E+06	1.345619E+03	2.000E+01	2.000E+03	1.544E+06	5.857E+02	3.766E+10	1.348E+03
0	PSDF	EL FOR	64	1600(2)	1.189494E+05	9.586750E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.550E+04	1.691E+03	1.692E+08	3.868E+02
0	PSDF	EL FOR	65	1601(2)	3.298133E+05	1.050254E+03	2.000E+01	2.000E+03	6.658E+05	2.000E+01	5.814E+08	8.875E+02
0	PSDF	EL FOR	66	1602(2)	3.523356E+05	8.955432E+02	2.000E+01	2.000E+03	7.723E+03	2.829E+02	7.694E+08	7.190E+02
0	PSDF	EL FOR	67	2000(2)	1.684707E+05	8.489423E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.746E+04	2.000E+03	3.898E+08	7.148E+02
0	PSDF	EL FOR	68	2001(2)	1.070561E+05	8.456708E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.145E+02	2.000E+03	1.333E+08	7.141E+02
0	PSDF	EL FOR	69	2002(2)	7.950147E+04	9.058417E+02	2.000E+01	2.000E+03	3.848E+02	1.998E+03	7.181E+07	7.140E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(6)	1.979898E+01	5.806763E+02	2.000E+01	2.000E+03	2.813E-06	1.188E+03	9.143E+00	5.507E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(7)	9.491885E+00	5.822906E+02	2.000E+01	2.000E+03	2.632E-06	1.614E+03	2.201E+00	5.503E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(8)	1.230138E+03	6.011486E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.280E-02	1.928E+03	2.437E+04	5.504E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(9)	6.522456E+01	5.743037E+02	2.000E+01	2.000E+03	3.151E-06	1.190E+03	1.051E+02	5.506E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(10)	1.843653E+02	7.777606E+02	2.000E+01	2.000E+03	4.282E-06	2.000E+01	5.719E+02	7.127E+02
0	PSDF	EL STR	119	50390(11)	6.032150E+03	6.997639E+02	2.000E+01	2.000E+03	2.857E-04	1.662E+03	7.041E+01	7.136E+02
0	PSDF	EL STR	119	52367(6)	1.340651E+02	7.736295E+02	2.000E+01	2.000E+03	3.000E-05	1.242E+02	2.033E+02	7.151E+02
0	PSDF	EL STR	119	52367(7)	7.155824E+01	7.129187E+02	2.000E+01	2.000E+03	5.715E-03	2.000E+03	7.026E+01	3.864E+02
0	PSDF	EL STR	119	52367(8)	3.622227E+01	7.182180E+02	2.000E+01	2.000E+03	6.698E-04	1.778E+03	1.882E+01	5.506E+02

Figure 1.2 Exemple d'un fichier contenant les résultats générés par MSC/NASTRAN lors d'une analyse aléatoire

De plus, le logiciel MSC/NASTRAN semble démontrer certaines faiblesses en ce qui a trait à l'efficacité de calcul. Bien qu'il soit impossible d'affirmer avec certitude quelle méthode d'intégration est utilisée, un nombre très élevé de points doit être calculé afin d'évaluer correctement l'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse; une étape indispensable afin d'obtenir la valeur efficace.

En ce qui concerne le phénomène de troncature des modes qui sera abordé plus en détail ultérieurement, MSC/NASTRAN permet d'atténuer cet effet en utilisant la méthode d'accélération modale. Une autre méthode, celle de la flexibilité résiduelle, peut être utilisée à la place de la méthode d'accélération modale. Cette seconde approche, très efficace, ne semble pas être disponible dans MSC/NASTRAN.

Ces diverses constations ont motivé ce projet de maîtrise. Celui-ci a comme objectif principal de développer une solution efficace afin de simplifier l'analyse de structures excitées aléatoirement à leur base. Même si ce type d'excitation se retrouve fréquemment dans divers domaines de l'ingénierie, la méthode développée et les hypothèses formulées dans le cadre de ce projet seront orientées principalement vers les applications rencontrées en aérospatiale.

1.2 La méthode générale de calcul en analyse aléatoire

Comme il le sera démontré au chapitre suivant, la méthode utilisée afin de calculer la réponse d'une structure excitée aléatoirement à sa base est très longue, mais aussi très répétitive. De façon simpliste, celle-ci peut se diviser en trois étapes principales:

1. Calcul de la fonction de réponse en fréquence (FRF), $H(i\omega)$, entre le point d'excitation et le point où la réponse est calculée.

2. Calcul de la densité spectrale de puissance (DSP) de la réponse, s'obtenant à partir de la densité spectrale de puissance de l'excitation et de la FRF.

$$S_x(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (1.1)$$

3. Intégration de la DSP de la réponse afin d'obtenir sa valeur efficace.

$$(V_{efficace})^2 = \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (1.2)$$

En ne perdant pas de vue ces trois grandes étapes, la compréhension des théories explicitées ultérieurement en sera facilitée, car le lecteur aura d'avance une idée précise des objectifs poursuivis par chacune des parties de la méthode développée.

1.3 Plan du mémoire

La première partie de ce mémoire résume les connaissances générales actuelles qui forment la base théorique de l'analyse aléatoire des structures. L'objectif premier de cette section est de démontrer la provenance des équations qui seront utilisées dans le cadre de ce projet.

Le développement de l'algorithme et l'explication des principales théories utilisées dans le cadre de ce projet font l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Cette section s'attardera à mettre en pratique la méthode choisie et expliquée en première partie.

Finalement, la dernière étape consiste à valider les résultats obtenus par la méthode développée et d'en évaluer les performances et les limites.

Chapitre 2

État des connaissances

2.1 Introduction

Les grands principes de la théorie des vibrations tels que nous les connaissons aujourd'hui, comme l'existence des modes et fréquences propres de vibration, furent formulés par Lord Rayleigh, en 1877, dans son ouvrage intitulé *Theory of Sound*. Il aura fallu attendre près de soixante-dix ans avant la parution des premiers ouvrages ou articles scientifiques traitant de la réponse des structures excitées par des vibrations aléatoires.

Dans la littérature, les problèmes concernant la dynamique des structures se divisent généralement en deux grandes catégories, selon le type d'excitation. Ce classement a été illustré à la figure 2.1. Lorsqu'une excitation peut être parfaitement représentée par un modèle mathématique, cette excitation sera dite déterministe. Une excitation déterministe n'est possible qu'à partir d'une maîtrise totale de tous les paramètres influents de celle-ci. Il est donc possible de déterminer à tout instant son évolution. Un phénomène aléatoire en est un dont on ne peut prédire mathématiquement le comportement. Il est généralement causé par l'effet cumulatif d'excitations diverses agissant simultanément sur la structure. Le nombre élevé d'excitations, et l'interaction complexe entre celles-ci, rendent utopique la description parfaite de l'excitation par des équations mathématiques. Malgré tout, ces phénomènes aléatoires peuvent être caractérisés

par quelques paramètres statistiques. Ainsi, on dira d'un phénomène aléatoire qu'il est stationnaire au sens large si sa moyenne et son *autocorrélation* calculées à un instant donné parmi tous les enregistrements sont constantes, et ce peu importe l'instant choisi (figure 2.2).

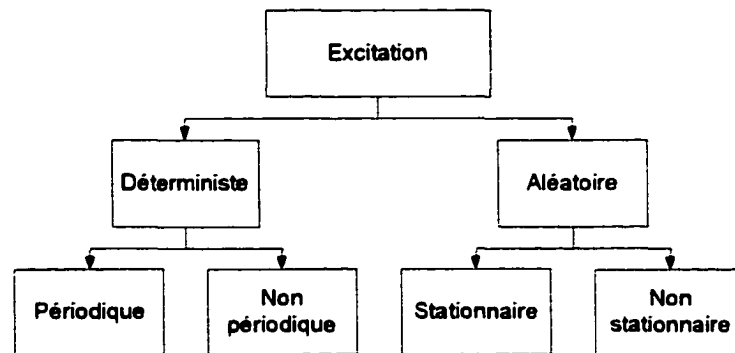


Figure 2.1 Classement des phénomènes physiques

De plus, on dira de l'excitation stationnaire qu'elle est *ergodique* si les propriétés statistiques calculées en fonction du temps pour un seul enregistrement sont équivalentes à ces mêmes propriétés calculées sur plusieurs enregistrements à un instant donné (figure 2.2).

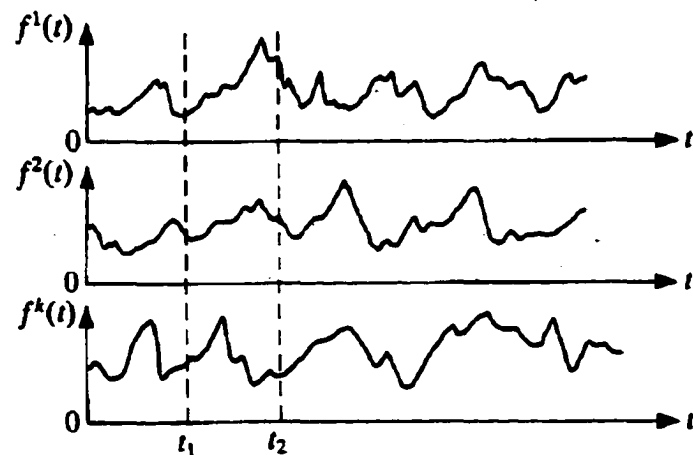


Figure 2.2 Enregistrements d'une même excitation aléatoire

Comme les structures étudiées dans le cadre de ce projet sont linéaires, celles-ci sont caractérisées par une fonction de réponse en fréquence unique et spécifique pour chaque degré de liberté, aussi appelée fonction de transfert. Cette dernière n'est pas fonction du type d'excitation, mais bien des propriétés physiques de la structure qui dans le cas présent sont considérées constantes. Il est donc possible de calculer la fonction de réponse en fréquence de la structure en utilisant une accélération déterministe unitaire. Il est avantageux de procéder ainsi, car les techniques et les équations régissant les excitations de type déterministe sont bien connues.

Ainsi, la première partie de ce chapitre met l'accent sur la méthode classique concernant le calcul de la réponse d'une structure excitée à la base de façon déterministe. L'objectif de cette partie est de proposer une méthode simple et efficace pour obtenir la fonction de transfert, étape nécessaire afin de calculer la réponse aléatoire de la structure. Cette partie débute par l'équation de mouvement appliquée à ce type d'excitation et démontre les différentes méthodes qui peuvent être utilisées afin de la solutionner.

La deuxième section traite plus particulièrement du calcul de la réponse d'une structure excitée aléatoirement. La méthode de résolution classique sera abordée, ainsi que les dernières théories développées constituant l'état de l'art de la résolution des problèmes de vibrations aléatoires stationnaires des structures, ce type d'excitation étant concerné par ce projet.

2.2 Excitation harmonique d'une structure à plusieurs DDL

L'équation de mouvement appliquée à une structure complexe (un système à plusieurs degrés de liberté (DDL)), peut s'écrire en employant la forme matricielle:

$$[M]\{\ddot{x}(\omega)\} + [C]\{\dot{x}(\omega)\} + [K]\{x(\omega)\} = \{f(\omega)\} + \{r(\omega)\} \quad (2.1)$$

où

$[M]$ Matrice de masse

$[C]$ Matrice d'amortissement

$[K]$ Matrice de rigidité

$\{f\}$ Vecteur des forces externes

$\{r\}$ Vecteur des forces de réaction associées aux conditions frontières et aux conditions de cinématique

Ces matrices sont généralement obtenues par la méthode des éléments finis [1]. Ce projet de recherche se limitant à l'étude du comportement d'une structure accélérée à sa base dans une seule direction, l'équation (2.1) peut s'exprimer en partageant le système en DDL *frontières* et en DDL *internes*. Cette partition permet de faire intervenir explicitement le terme d'accélération à la base. L'équation partagée² du système est la suivante:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} \\ M_{fi} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} \\ C_{fi} & C_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \\ K_{fi} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r_f \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Cette équation modélise le comportement dynamique de la structure étudiée. La solution de l'équation (2.2) pour x_i s'effectue en utilisant la première ligne seulement, le déplacement imposé à la base, x_f , étant connu. La deuxième ligne de ce système d'équations pourra être solutionnée ultérieurement afin de calculer les forces de réaction à la base et les conditions de cinématique, si nécessaire.

² Afin d'alléger l'écriture des équations, les termes signifiant « fonction de la fréquence » (ω) seront omis dans les équations subséquentes.

Il existe deux stratégies fondamentales de résolution en dynamique : la méthode directe et la méthode de superposition modale. Les particularités de chacune de ces méthodes sont expliquées aux points suivants.

2.2.1 Méthode de résolution directe

La méthode de résolution directe est généralement utilisée pour traiter les problèmes non linéaires ou lorsque le contenu fréquentiel de l'excitation est susceptible d'exciter un très grand nombre de modes de la structure, comme le ferait un impact par exemple. L'équation de départ de la méthode directe s'obtient en ne conservant que la première ligne de l'équation (2.2):

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_f \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.3)$$

Dans le cas d'une excitation à la base, le mouvement de la structure peut être interprété comme étant la superposition de deux mouvements : un premier de corps rigide associé à un déplacement du DDL frontière et un second relatif par rapport à la base qui est purement élastique. Ainsi le vecteur $\{x_i\}$, qui représente le déplacement relié aux nœuds internes, est en fait la somme de deux contributions : la contribution *quasi-statique* et la contribution dynamique.

$$\{x_i\} = \{x_i^s\} + \{x_i^d\} \quad (2.4)$$

où

$\{x_i^s\}$ Contribution quasi-statique

$\{x_i^d\}$ Contribution dynamique

Comme la contribution *quasi-statique* ne représente que l'effet du mouvement de corps rigide transmis par la base à l'ensemble de la structure, l'équation (2.3) peut être réécrite en négligeant les termes d'inertie et d'amortissement:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^s \\ x_f \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.5)$$

De cette équation, la relation qui relie le déplacement à la base au déplacement *quasi-statique* de l'ensemble de la structure est obtenue:

$$\{x_i^s\} = -[K_{ii}]^{-1} [K_{if}] \{x_f\} \quad (2.6)$$

Si tous les DDL frontières sont situés en un nœud unique, alors le produit de l'équation (2.6) génère les modes rigides géométriques de la structure. En reprenant l'équation (2.3) en y insérant la notion de contribution dynamique et de contribution *quasi-statique*, la relation suivante est obtenue :

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i^s + \ddot{x}_i^d \\ \ddot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ii} & C_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_i^s + \dot{x}_i^d \\ \dot{x}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{if} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i^s + x_i^d \\ x_f \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (2.7)$$

La dernière étape de la méthode directe consiste à isoler les variables reliées à la contribution dynamique des nœuds internes, la seule inconnue dans la dernière équation. En effet, la contribution *quasi-statique* se calcule aisément en utilisant la relation décrite par l'équation (2.5) qui relie le déplacement à la base au déplacement *quasi-statique* de la structure. Le terme associé à la contribution dynamique s'obtient en résolvant le système d'équations suivant :

$$[M_{ii}]\{\ddot{x}_i^d\} + [C_{ii}]\{\dot{x}_i^d\} + [K_{ii}]\{x_i^d\} = \{G\} \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} \{G\} &= -[M_{ii}]\{\ddot{x}_i^s\} - [M_{if}]\{\ddot{x}_f\} - [C_{ii}]\{\dot{x}_i^s\} - [C_{if}]\{\dot{x}_f\} \\ &= \left([M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [M_{if}]\right)\{\ddot{x}_f\} + \left([C_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [C_{if}]\right)\{\dot{x}_f\} \end{aligned}$$

Le couplage existant entre les équations de ce système constitue le principal obstacle à l'obtention de leurs solutions, car elles doivent être résolues simultanément³. Par contre, en effectuant un changement du système de coordonnées afin de passer du domaine physique au domaine modal, un ensemble d'équations découplées pouvant être résolues facilement est obtenu. Cette technique de résolution est expliquée au point suivant.

2.2.2 Méthode de superposition modale

La méthode de résolution la plus couramment utilisée en dynamique est la méthode de superposition modale. Celle-ci convient particulièrement aux structures linéaires dont les premiers modes propres sont susceptibles d'être excités. Cette méthode peut se subdiviser en deux classes selon la nature des modes propres utilisés. La première classe regroupe les structures à amortissement élevé, et nécessite l'utilisation de modes propres complexes. La seconde classe regroupe les structures faiblement amorties et les modes propres réels sont employés. Heureusement, pour de nombreux cas rencontrés en ingénierie, les structures étudiées sont faiblement amorties, ce qui permet d'éviter le long calcul des modes complexes. Comme ce projet de maîtrise s'intéresse uniquement aux structures faiblement amorties, seuls

³ Même si, a priori, l'inversion de la matrice $[K_{ii}]$ peut sembler un obstacle important. Des méthodes alternatives sont généralement utilisées afin d'effectuer cette tâche.

les modes propres réels seront utilisés pour la formulation de la méthode de superposition modale.

Avant tout, il est nécessaire de solutionner le problème aux valeurs propres du système homogène sans amortissement afin d'obtenir les modes propres et les fréquences naturelles de la structure. L'expression de ce système s'obtient en reprenant l'équation (2.8) en omettant les termes associés au DDL frontières (le terme $\{G\}$) ainsi qu'en négligeant l'amortissement:

$$([K_{ii}] - \omega^2 [M_{ii}]) \{x_i^d\} = \{0\} \quad (2.9)$$

Comme cette équation est résolue en imposant un déplacement nul au degré de liberté frontière ($\{x_f\}$), les modes propres (aussi appelés vecteurs propres) obtenus sont dits contraints.

La méthode de superposition modale prend avantage de la propriété d'orthogonalité entre les vecteurs propres. Lorsque ceux-ci sont normalisés par rapport à la masse modale, les deux relations suivantes sont obtenues:

$$[\phi_c]^T [M_{ii}] [\phi_c] = [I] \quad (2.10)$$

$$[\phi_c]^T [K_{ii}] [\phi_c] = [\Lambda_c] \quad (2.11)$$

où

$[\phi_c]$ Matrice des modes propres contraints

$[I]$ Matrice identité

$[\Lambda_c]$ Matrice diagonale des valeurs propres du système contraint

La relation permettant le passage du domaine physique vers le domaine modal est la suivante:

$$\{x_i^d\} = [\phi_c] \{q\} \quad (2.12)$$

où

$\{q\}$ Vecteur des coordonnées modales

Le vecteur $\{x_i^d\}$ peut donc s'exprimer comme une somme, ou une *superposition*, des modes propres de la structure. Le découplage des équations s'effectue en insérant l'équation (2.12) dans l'équation (2.8), et en pré-multipliant par $[\phi_c]^T$:

$$[\phi_c]^T [M_{ii}] [\phi_c] \{\ddot{q}\} + [\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c] \{\dot{q}\} + [\phi_c]^T [K_{ii}] [\phi_c] \{q\} = [\phi_c]^T \{G\} \quad (2.13)$$

Insérant les relations (2.10) et (2.11) dans cette dernière équation:

$$[I] \{\ddot{q}\} + [\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c] \{\dot{q}\} + [\Lambda_c] \{q\} = [\phi_c]^T \{G\} \quad (2.14)$$

Parce que le problème aux valeurs propres a été résolu en ignorant l'amortissement, ce dernier n'est pas orthogonal aux vecteurs propres. Le terme $[\phi_c]^T [C_{ii}] [\phi_c]$ n'est donc pas généralement une matrice diagonale, et l'équation (2.14) est toujours couplée par le terme d'amortissement.

Plusieurs approches permettent de remédier à cette difficulté. Une première solution consiste à ne retenir que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement modal. Cette pratique est justifiée par l'hypothèse de Basile [2] du découplage dynamique des équations modales du mouvement même si la matrice d'amortissement modal est couplée. Celle-ci stipule que les équations modales sont considérées découplées, malgré la présence de couplage par le terme d'amortissement modal, si les deux conditions suivantes sont respectées :

1. La structure est faiblement amortie.
2. Les fréquences naturelles sont bien séparées.

Ces conditions ne pouvant être toujours satisfaites et parce que l'amortissement physique n'est généralement pas connu, une seconde option a été étudiée. Celle-ci consiste à modéliser directement l'amortissement selon une approche modale, c'est-à-dire de spécifier une valeur d'amortissement pour chacun des modes. La modification des équations précédentes, afin d'y inclure ce type d'amortissement, fait l'objet des paragraphes suivants.

En reprenant l'équation (2.14) et en y retirant les termes associés à l'amortissement physique celle-ci devient:

$$\begin{aligned} [I]\{\ddot{q}\} + [\Lambda_c]\{q\} &= [\phi_c]^T \left([M_{ii}][K_{ii}]^{-1}[K_{if}] - [M_{if}] \right) \{\ddot{x}_f\} \\ &= [\phi_c]^T \{\hat{G}\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

où

$\{\hat{G}\}$ est identique au terme $\{G\}$ défini à l'équation (2.8), mais sans le terme d'amortissement.

Deux types d'amortissement modal sont généralement utilisés: l'amortissement modal structural et l'amortissement modal visqueux dont les paramètres peuvent être établis d'après des essais dynamiques.

Comme ce projet de recherche se limite à la modélisation de l'amortissement comme étant du type modal visqueux, les développements mathématiques suivants se limiteront à celui-ci. Ainsi, en introduisant le terme d'amortissement à l'intérieur de l'équation (2.15), celle-ci devient:

$$[I]\{\ddot{q}\} + [2\gamma\sqrt{\Lambda_c}]\{\dot{q}\} + [\Lambda_c]\{q\} = [\phi_c]^T \{\hat{G}\} \quad (2.16)$$

où

$[2\gamma\sqrt{\Lambda_c}]$ Matrice diagonale d'amortissement modal visqueux

γ Rapport d'amortissement modal variable en fonction de la fréquence

Le rapport d'amortissement modal est spécifié par l'utilisateur qui, par son expérience, doit juger quelle valeur doit être utilisée. La matrice d'amortissement modal visqueux introduite dans la dernière équation est diagonale. Ainsi, l'équation (2.16) est maintenant complètement découplée, ce qui permet d'obtenir la solution du système d'équations beaucoup plus facilement.

L'objectif de l'approche modale est non seulement de découpler les équations, mais aussi de réduire la taille du problème étudié. Dans ce cas, seulement un nombre limité de modes sera retenu. De façon générale, le principal critère utilisé pour le choix des modes est de retenir ceux qui se situent à l'intérieur de la bande de fréquences de l'excitation. Par contre, cette troncature des modes a des effets néfastes, principalement sur les variables secondaires (contraintes, forces...), surtout lorsque le chargement dynamique a des effets quasi-statiques prédominants, c'est-à-dire lorsque la fréquence d'excitation est beaucoup plus faible que la première fréquence naturelle de la structure.

Parmi les diverses solutions proposées [1] [3], il ne sera fait mention que de deux méthodes qui permettent d'atténuer cet effet : la méthode d'accélération modale et la méthode de flexibilité résiduelle.

Méthode d'accélération modale

Le développement de ces équations s'effectue à partir de l'équation (2.12), mais en ne retenant seulement qu'un nombre limité de modes dans la superposition modale :

$$\{x_i^d\} = [\phi_c^R] \{q^R\} \quad (2.17)$$

où l'exposant R indique le nombre de modes retenus.

L'équation (2.16) pour un nombre de modes R aura donc la forme suivante :

$$[I] \{\ddot{q}^R\} + [2\gamma\sqrt{\Lambda_c^R}] \{\dot{q}^R\} + [\Lambda_c^R] \{q^R\} = [\phi_c^R]^T \{\hat{G}\} \quad (2.18)$$

En isolant $\{q^R\}$ de la dernière équation, et en introduisant le résultat dans l'équation (2.17), la première forme de l'équation de la méthode d'accélération modale est obtenue :

$$\{x_i^d\} = [\phi_c^R] [\Lambda_c^R]^{-1} [\phi_c^R]^T \{\hat{G}\} - [\phi_c^R] [\Lambda_c^R]^{-1} \left(\{\ddot{q}^R\} + [2\gamma\sqrt{\Lambda_c^R}] \{\dot{q}^R\} \right) \quad (2.19)$$

Comme la méthode s'intéresse aux cas où la fréquence d'excitation est beaucoup plus faible que la première fréquence naturelle, alors $\{\ddot{q}^R\}$ et $\{\dot{q}^R\}$ tendent vers zéro. Avec cette dernière condition et en conservant tous les modes propres de la structure, l'équation (2.19) devient :

$$\{x_i^d\} = [\phi_c] [\Lambda_c]^{-1} [\phi_c]^T \{\hat{G}\} \quad (2.20)$$

En partant de la relation suivante :

$$[\Lambda_c] = [\phi_c] [K_{ii}] [\phi_c]^T \quad (2.21)$$

Il est possible de démontrer que :

$$[K_{ii}]^{-1} = [\phi_c][\Lambda_c]^{-1}[\phi_c]^T \quad (2.22)$$

En insérant cette dernière équation dans (2.20) :

$$\therefore \{x_i^d\} = [K_{ii}]^{-1} \{\hat{G}\} \quad (2.23)$$

L'équation (2.23) représente donc la contribution dynamique, pour un chargement quasi-statique, associée au déplacement des DDL internes de la structure lorsque tous les modes sont conservés. La seconde forme de la méthode d'accélération modale peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\{x_i^d\} = [K_{ii}]^{-1} \{\hat{G}\} - [\phi_c^R][\Lambda_c^R]^{-1} \left(\{\ddot{q}^R\} + [2\gamma\sqrt{\Lambda_c^R}] \{\dot{q}^R\} \right) \quad (2.24)$$

Méthode de la flexibilité résiduelle

La relation utilisant la méthode de flexibilité résiduelle s'obtient en récrivant l'équation (2.18) sous une forme différente:

$$[I]\{\ddot{q}^R\} + [2\gamma\sqrt{\Lambda_c^R}]\{\dot{q}^R\} = [\phi_c^R]^T \{\hat{G}\} - [\Lambda_c^R]\{q^R\} \quad (2.25)$$

En pré-multipliant les deux membres de cette dernière équation par $[\phi_c^R][\Lambda_c^R]^{-1}$:

$$\left[\phi_c^R\right]\left[\Lambda_c^R\right]^{-1}\left(\left\{\ddot{q}^R\right\}+\left[2\gamma\sqrt{\Lambda_c^R}\right]\left\{\dot{q}^R\right\}\right)=\left[\phi_c^R\right]\left[\Lambda_c^R\right]^{-1}\left[\phi_c^R\right]^T\left\{\hat{G}\right\}-\left[\phi_c^R\right]\left\{q^R\right\} \quad (2.26)$$

Pour obtenir l'expression finale de la flexibilité résiduelle, il suffit de substituer (2.26) dans (2.24):

$$\left\{x_i^d\right\}=\left[\phi_c^R\right]\left\{q^R\right\}+\left[K_{ii}\right]^{-1}\left\{\hat{G}\right\}-\left[\phi_c^R\right]\left[\Lambda_c^R\right]^{-1}\left[\phi_c^R\right]^T\left\{\hat{G}\right\} \quad (2.27)$$

où

$\left[\phi_c^R\right]\left\{q^R\right\}$	Contribution de la superposition modale (R modes)
$\left[K_{ii}\right]^{-1}\left\{\hat{G}\right\}-\left[\phi_c^R\right]\left[\Lambda_c^R\right]^{-1}\left[\phi_c^R\right]^T\left\{\hat{G}\right\}$	Terme estimant l'effet résiduel causé par la troncature (Tous les modes - r modes retenus)

En observant de plus près l'équation (2.27), on remarque que la contribution totale est en fait la somme de la contribution dynamique des modes retenus et de la contribution *rigide* de tous les autres modes. Cette équation résume un principe connu de l'analyse dynamique, c'est-à-dire que lorsque la fréquence d'excitation est beaucoup plus faible que la fréquence naturelle d'une mode, le comportement de ce dernier se caractérise que par le terme de rigidité.

Pour conclure, cette section avait pour objectif de réviser les deux méthodes utilisées dans la résolution des problèmes déterministes en dynamique : la méthode directe et la méthode de superposition modale. Cette dernière méthode démontre une efficacité certaine, principalement au niveau du découplage des équations de mouvement et de la réduction de la taille du problème étudié. Ainsi, la transformation vers l'espace modal permet de considérer de façon indépendante chacune des équations du système et de les traiter comme si chacune représentait un système à un seul degré de liberté. De plus, deux solutions ont été proposées afin d'atténuer l'effet néfaste de la troncature des modes. L'application de ces théories dans le cadre de problèmes traitant des excitations aléatoires sera démontrée au point suivant.

2.3 Excitation aléatoire

Une excitation aléatoire est une excitation pour laquelle un modèle mathématique ne peut être utilisé afin de la représenter fidèlement. La figure 2.3 illustre un exemple d'excitation aléatoire dans le domaine temporel.

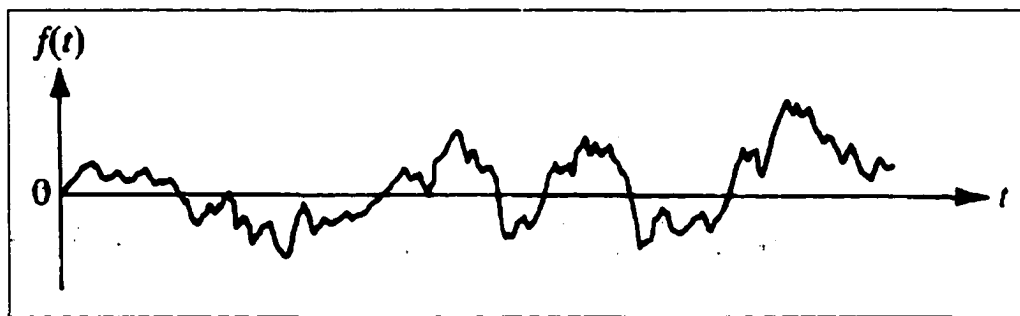


Figure 2.3 Excitation aléatoire dans le domaine temporel

Une solution qui pourrait être envisagée consisterait à considérer cette excitation aléatoire comme une excitation transitoire, et à résoudre le problème dynamique en utilisant les techniques associées à ce type d'excitation. Le point suivant discute de la pertinence de cette façon de procéder.

2.3.1 Analyse aléatoire et analyse transitoire

En résolvant numériquement l'équation de mouvement en fonction du temps⁴ suivante:

⁴ Tous les types d'excitation (harmonique, aléatoire, transitoire, etc.) sont définis dans le temps. Donc, l'équation (2.28) est la forme la plus générale de l'équation de mouvement.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.28)$$

la réponse à tout instant d'une structure excitée de façon transitoire peut être obtenue. Pour la résolution de l'équation (2.28), une règle du pouce stipule que le pas d'intégration dans le temps doit être au moins égal à ¼ de la période du mode ayant la fréquence naturelle la plus élevée. En suivant ce raisonnement, si une structure est excitée sur une bande de fréquences de 0 à 1000 Hz, le pas d'intégration doit être de l'ordre de 0.00025 seconde. Si la solution recherchée est pour une durée de deux minutes⁵, alors 480 000 pas d'intégration seront nécessaires.

Qui plus est, comme l'excitation est aléatoire, rien ne peut être présumé de la connaissance d'un seul enregistrement. En effet, le second enregistrement d'un même phénomène peut avoir une allure très différente du premier et ainsi générer une toute autre réponse. Le résultat de la conception d'une structure s'effectuant en utilisant la valeur maximale de la réponse calculée parmi un nombre quelconque d'enregistrements risquerait d'en être une surdimensionnée.

Par contre, il pourrait être avantageux de tenir compte des propriétés statistiques de l'excitation et du fait que la structure a un comportement linéaire afin de simplifier le calcul de la réponse de celle-ci. La section suivante présente les concepts de l'analyse des structures soumises à des vibrations aléatoires.

2.3.2 Concepts et théories de l'analyse des vibrations aléatoires des structures

Dans le cas de vibrations aléatoires, peu importe le nombre d'enregistrements représentant l'excitation, il n'y en aura pas deux identiques. Il est donc tout à fait inutile de connaître la réponse à chaque instant pour un échantillon donné puisque pour le prochain événement, la

⁵ Les essais de qualification d'une structure aérospatiale sont normalement d'une durée de deux minutes.

réponse en fonction du temps sera complètement différente et ce malgré, le fait que le phénomène aléatoire considéré soit le même (figure 2.2).

L'excitation étant aléatoire, il est impossible de décrire parfaitement son comportement à l'aide d'équations mathématiques, d'où la nécessité de faire intervenir les théories statistiques. Par contre, si certaines hypothèses sont vérifiées, les propriétés statistiques de l'excitation seront constantes. Ces hypothèses sont les suivantes:

- L'excitation est stationnaire et ergodique. La moyenne et la variance en fonction de la période sont ainsi constantes peu importe l'échantillon choisi.
- La fonction de densité de probabilité de l'excitation est gaussienne. Dans ce cas, elle est complètement définie par sa moyenne et son écart type. L'utilisation de cette fonction de probabilité se justifie aisément par le théorème de la limite centrale.
- La moyenne de l'excitation est définie nulle. L'excitation est donc complètement décrite par son écart type (qui pour ce cas particulier équivaut à la valeur efficace de l'excitation).

2.3.3 Réponse d'un système à un DDL excité aléatoirement

Dans le cas d'une excitation stationnaire et *ergodique* où la fonction de densité de probabilité est gaussienne et de moyenne nulle, l'excitation se définit à l'aide d'un seul échantillon. L'équation de mouvement d'un système à un seul DDL est la suivante:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \quad (2.29)$$

La fonction de densité spectrale de puissance de l'excitation se définit comme:

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |F_T(i\omega)|^2 \quad (2.30)$$

où

F_T Transformée de Fourier tronquée dans le temps de $f(t)$

$||$ Représente la norme du vecteur

La valeur efficace au carré de l'excitation est l'aire sous la courbe de la fonction de densité spectrale de puissance de celle-ci:

$$(\text{valeur efficace})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega \quad (2.31)$$

La réponse d'une structure linéaire à ce type d'excitation sera aussi stationnaire, *ergodique*, de moyenne nulle et possédera une fonction de densité de probabilité gaussienne (sauf pour la contrainte de von Mises où la moyenne ne sera pas nulle et la fonction de densité de probabilité ne sera pas gaussienne). La fonction de densité spectrale de la réponse se définit comme :

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |X_T(i\omega)|^2 \quad (2.32)$$

où

X_T Transformée de Fourier tronquée dans le temps de $x(t)$

Les relations entre le déplacement $x(t)$, la force d'excitation $f(t)$, et leurs transformées de Fourier respectives, X_T et F_T sont:

$$x_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.33)$$

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_T(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.34)$$

En insérant les équations (2.33) et (2.34) dans l'équation (2.29), la relation suivante est obtenue :

$$X_T(i\omega) = \frac{F_T(i\omega)}{(K - \omega^2 M + i\omega C)} = H(i\omega) F_T(i\omega) \quad (2.35)$$

où

$H(i\omega)$ Fonction de transfert entre l'excitation et la réponse

Finalement, en insérant l'équation (2.35) dans l'équation (2.32), la relation usuelle de la fonction de densité spectrale de puissance de la réponse est obtenue :

$$S_x(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_f(\omega) \quad (2.36)$$

La valeur efficace de la réponse s'obtient, comme dans le cas de l'excitation (équation (2.31)), en intégrant la fonction de densité spectrale de puissance de la réponse sur la bande de fréquences d'intérêt. De plus, comme la valeur efficace au carré se définit de la façon suivante [4]:

$$(\text{valeur efficace})^2 = \sigma^2 + \mu^2 \quad (2.37)$$

où

σ^2 représente la variance

μ^2 représente la moyenne au carrée

Une moyenne nulle implique que la valeur efficace au carré du spectre est exactement égale à sa variance.

L'équation (2.36) démontre clairement que la fonction de transfert de la structure, $H(i\omega)$, est indispensable pour le calcul de la réponse, d'où l'utilité de la section traitant de l'excitation harmonique.

La fonction de transfert se définit comme étant la relation entre l'entrée du système et la réponse du même système causée par cette entrée :

$$H(i\omega) = \frac{x(i\omega)}{\ddot{x}_f(i\omega)} \quad (2.38)$$

Si une accélération harmonique unitaire est imposée à la base (\ddot{x}_f) à une fréquence spécifique, la réponse de la structure ainsi obtenue sera directement équivalente à la fonction de transfert de celle-ci. C'est donc cette méthode qui sera employée afin d'évaluer la fonction de transfert.

Même si a priori l'étude du cas d'une structure à un DDL peut sembler simpliste, il faut se rappeler que la technique de résolution modale transforme un système à plusieurs DDL en une somme de systèmes à un DDL. Ainsi, le prochain point traitera de la méthode utilisée afin de calculer la réponse d'un système à plusieurs DDL soumis à une excitation aléatoire.

2.3.4 Réponse d'un système à plusieurs DDL excité aléatoirement

En appliquant la théorie vue précédemment au cas général d'une structure à plusieurs DDL, l'équation générale [5] permettant d'obtenir la variance et par le fait même la valeur efficace au carré du déplacement pour le DDL y de la structure s'exprime de la façon suivante:

$$\sigma_y^2 = (\sigma_y^s)^2 + (\sigma_y^d)^2 + 2 \text{cov}(y^s, y^d) \quad (2.39)$$

Les trois composantes de cette dernière équation se calculent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\sigma_y^d)^2 = & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Psi_{yj} \Psi_{yk} \left[\sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \frac{\phi_{lj} \phi_{mk}}{M_j M_k} \int_0^\infty h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{P_l P_m}(\omega) d\omega \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r \Gamma_{lj} \Gamma_{mk} \int_0^\infty h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_l \ddot{x}_m}(\omega) d\omega \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$(\sigma_y^s)^2 = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r A_{yl} A_{ym} \int_0^\infty \omega^{-2} S_{\ddot{x}_l \ddot{x}_m}(\omega) d\omega \quad (2.41)$$

$$\text{cov}(y^s, y^d) = - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^r \Psi_{yj} A_{yl} \Gamma_{mj} \int_0^\infty \omega^{-2} h_j(\omega) S_{\ddot{x}_l \ddot{x}_m}(\omega) d\omega \quad (2.42)$$

Dans ces dernières équations,

(σ_y^d)	composante dynamique de la variance de la réponse associée au DDL y
(σ_y^s)	composante statique de la variance de la réponse associée au DDL y
$\text{cov}(y^s, y^d)$	composante croisée dynamique-statique de la variance de la réponse associée au DDL y
n	nombre de modes retenus dans la superposition modale
p	nombre de DDL libres excités par une force externe
r	nombre de DDL contraints excités par une accélération
Ψ_{yj}	composante modale du DDL y associée au $j^{\text{ième}}$ mode
ϕ_{lj}	$l^{\text{jème}}$ composante de la matrice des vecteurs propres de déplacement
M_j	$j^{\text{ième}}$ masse modale
h_k	fonction de transfert modale de déplacement associée au mode k
h_j^*	complexe conjuguée de la fonction de transfert modale de déplacement associée au mode j
$S_{P_l P_m}$	densité spectrale de puissance croisée des forces externes
Γ_{lj}	$l^{\text{ième}}$ composante du vecteur de participation modal du mode j
$S_{\ddot{x}_l \ddot{x}_m}$	densité spectrale de puissance croisée de l'accélération aux supports
A_{yl}	déplacement du DDL y causé par un déplacement unitaire au DDL contraint l

Calcul des variables secondaires

Les variables primaires sont les déplacements, les vitesses et les accélérations. Elles se distinguent par le fait que leurs valeurs efficaces se calculent en employant directement les modes propres de déplacement (le calcul des variables primaires sera expliqué plus en détails ultérieurement). Il existe d'autres variables, tout aussi pertinentes lors d'une analyse structurale qui sont dites secondaires, soient :

- les contraintes
- les déformations
- les forces aux éléments
- forces associées aux conditions frontières (SPC)
- forces associées aux conditions de cinématique (MPC)
- les forces aux nœuds (Grid point forces)

Comme il est possible de relier chacune de ces variables secondaires avec les valeurs de déplacement, celles-ci se calculent en faisant intervenir une matrice de transformation entre ces deux quantités. Le calcul des contraintes élémentaires sera utilisé à titre d'exemple afin d'illustrer la méthode de calcul.

Soit la matrice de transformation suivante entre les déplacements et les contraintes pour l'élément A :

$$\{\sigma_A\} = [T_{\sigma x}]\{x\} \quad (2.43)$$

En partageant la dernière équation en DDL internes et en DDL frontières :

$$\{\sigma_A\} = \begin{bmatrix} T_{\sigma x}^{ii} & T_{\sigma x}^{if} \\ T_{\sigma x}^{ji} & T_{\sigma x}^{jf} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_f \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

En supposant que l'élément A ne relie que des nœuds internes, et ce uniquement dans le but de simplifier le développement subséquent:

$$\{\sigma_A\} = [T_{\sigma i}^{ii}] \{x_i^d\} \quad (2.45)$$

Dans la dernière équation, seule la contribution dynamique est conservée, car la contribution *quasi-statique* ne provoque aucun déplacement relatif. Ainsi, aucune force, contrainte ou déformation n'est générée au sein de la structure par cette composante. En reprenant l'équation (2.12) reliant les coordonnées physiques aux coordonnées modales, on pose :

$$\{x_i^d\} = [\phi_c] \{q\}$$

Et en insérant cette relation dans l'équation (2.45) on trouve:

$$\begin{aligned} \{\sigma_A\} &= [T_{\sigma i}^{ii}] [\phi_c] \{q\} \\ &= [\Psi_c^\sigma] \{q\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

où

$$[\Psi_c^\sigma] \quad \text{Vecteurs propres contraints des contraintes}$$

Comme la contribution *quasi-statique* sur ces variables est nulle, il est donc possible de calculer directement les valeurs efficaces de toutes les variables secondaires, à l'exception de la contrainte de von Mises, en utilisant la partie de l'équation (2.39) décrite par l'équation (2.40). Il suffit d'utiliser la composante modale appropriée (vecteurs propres de contraintes, vecteurs

propres de déformations...) calculée directement par MSC/NASTRAN. Le calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises est abordé au point suivant.

Calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises

La théorie développée jusqu'à maintenant ne s'applique plus au calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises; la méthode précédente avait comme hypothèse fondamentale la linéarité des variables calculées par rapport aux modes. Cette hypothèse n'est plus valable pour la contrainte de von Mises qui est une fonction non linéaire des composantes du tenseur de contraintes. Ainsi, le principe de superposition modale utilisé pour les autres variables ne peut pas être utilisé pour le calcul de cette contrainte. De plus, la fonction de probabilité de la contrainte de von Mises n'est pas gaussienne et sa moyenne ne peut être nulle (figure 2.4). Ces hypothèses avaient été formulées lors du développement théorique précédent.

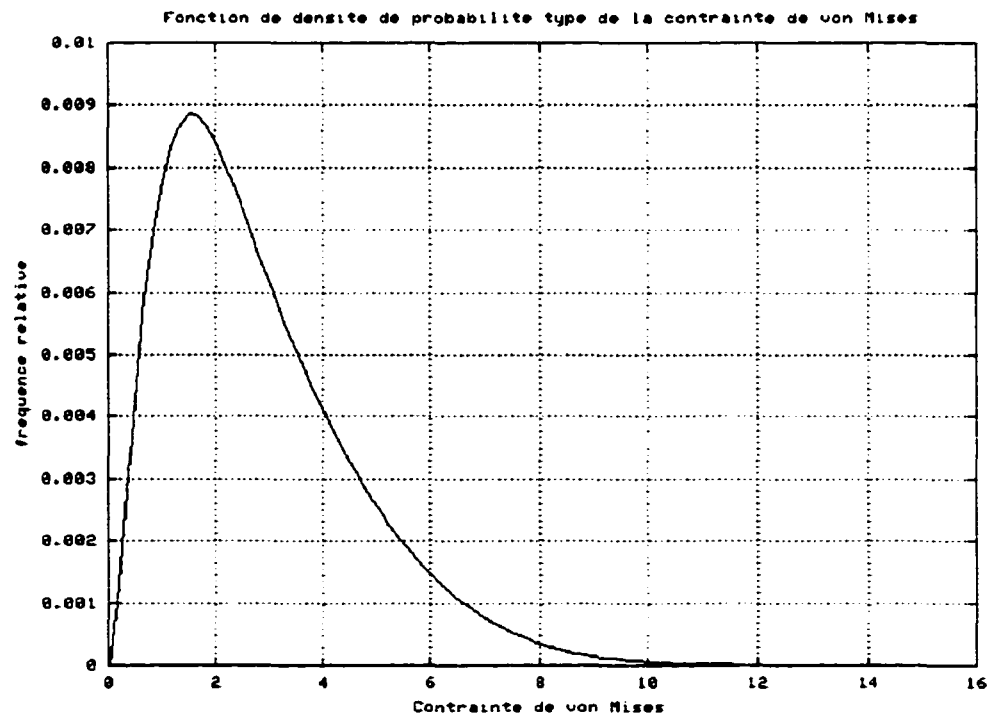


Figure 2.4 Exemple d'une fonction de densité de probabilité type de la contrainte de von Mises

Afin de surmonter cette difficulté, deux différentes méthodes ont été mises en place pour calculer d'une manière totalement différente les valeurs efficaces de la contrainte de von Mises. Ces théories seront expliquées au moment opportun dans ce mémoire.

2.3.5 Méthode d'intégration de la DSP

La valeur efficace au carré s'obtient en intégrant la densité spectrale de puissance de la réponse sur la bande de fréquences d'intérêt, comme stipulé par les équations (2.40) à (2.42). En observant la figure 2.5, il est facile d'admettre que l'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse n'est pas une tâche facile, et ce à cause de la forme même de la fonction à intégrer. Les équations décrivant ce type de courbes étant complexes, l'intégration s'effectue traditionnellement à l'aide d'une méthode numérique appropriée.

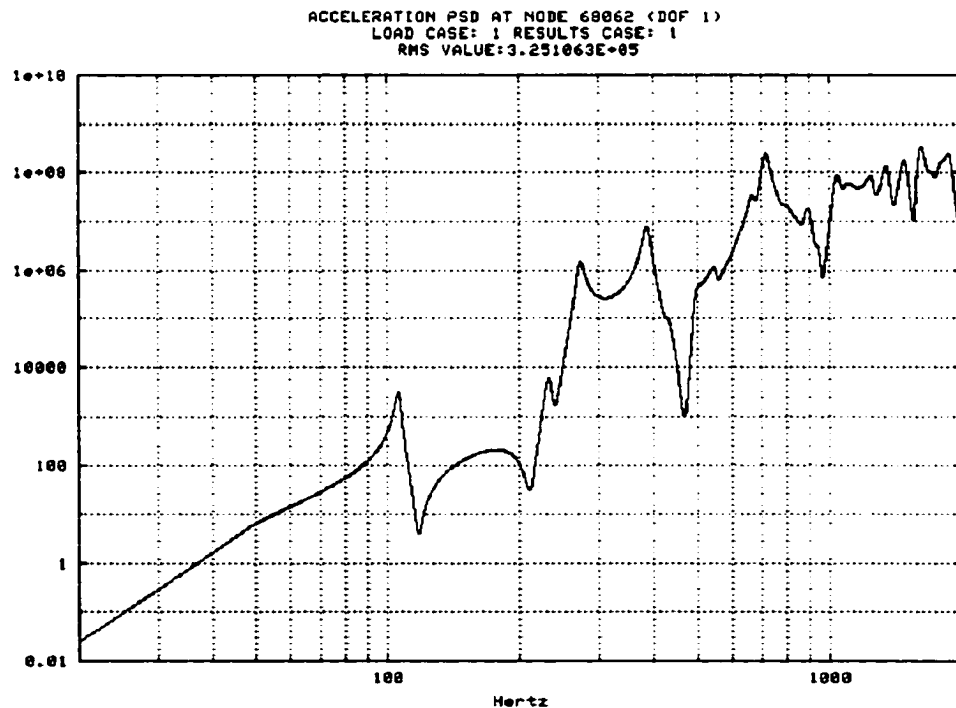


Figure 2.5 Exemple type d'une densité spectrale de puissance de la réponse

Depuis le début des années 1980, plusieurs méthodes d'intégration analytique ont été développées afin de trouver une solution alternative à l'intégration numérique qui présente quelques difficultés. Par exemple, il peut être difficile pour un algorithme numérique d'intégrer, sans commettre d'erreurs, les points d'inflexion de la densité spectrale de puissance. Ces points sont généralement causés lorsque la structure étudiée est faiblement amortie, comme c'est le cas dans le cadre de ce projet. De plus, il est important de considérer l'avantage que pourrait procurer un algorithme analytique en ce qui a trait au temps de calcul. Les paragraphes suivants dressent un bref historique des différentes stratégies qui ont été utilisées afin d'améliorer la précision et le temps de calcul de la réponse des structures excitées aléatoirement.

Le développement d'une des premières méthodes d'intégration analytique de la densité spectrale de puissance semble revenir à Der Kiureghian [6] (1980). Cependant, la méthode qu'il propose a comme désavantage principal qu'elle ne s'applique qu'à une excitation de type *bruit blanc*, et elle traite uniquement de la contribution dynamique. Spanos [7] (1983) [8] (1987) propose une méthode analytique différente, mais toujours limitée au même type d'excitation et ne concerne toujours que la contribution dynamique.

Dans la littérature du début des années 1990, un changement de stratégie semble avoir été adopté. Les efforts pour réduire le temps de calcul ne sont plus concentrés sur la méthode d'intégration, mais plutôt sur des méthodes permettant d'obtenir plus efficacement la densité spectrale de puissance. Jiahao [9] (1992) propose une variation de la méthode CQC (Complete Quadratic Combination) traditionnelle qui améliore la rapidité de calcul, tandis que Der Kiureghian et Nakamura [10] (1993) modifie la méthode CQC traditionnelle en y ajoutant le concept de flexibilité résiduelle. Ces méthodes n'ont pas été retenues pour ce projet car elles supposent une excitation de type *bruit blanc*. Cette limite importante peut être acceptable en sismologie mais elle ne convient pas aux spectres d'excitations aléatoires fréquemment rencontrés en aérospatiale.

Harichandran [11] (1992) [12] (1993) propose une méthode d'intégration analytique pouvant s'appliquer aux problèmes auxquels ce projet s'intéresse. Cette méthode concerne plusieurs types d'excitations, dont celles de type *bruit blanc*, ainsi que les spectres composés de segments linéaires ayant une pente entière dans une échelle *log-log*. De plus, elle prend en considération les contributions statiques et dynamiques de la réponse.

Finalement, Chen et Ali [5] (1997) améliorent la méthode d'Harichandran en proposant une solution permettant de traiter le cas où le spectre d'excitation est formé de segments linéaires possédant une pente quelconque lorsqu'il est présenté dans une échelle *log-log*. Cette méthode s'applique parfaitement aux cas devant être traités par ce projet de maîtrise, si ce n'est qu'elle ne tient pas compte de l'effet de la troncature des modes sur les variables calculées.

2.4 Calcul de la réponse associée à une probabilité spécifique

Il est possible de déterminer la fonction de densité de probabilité des réponses calculées (sauf en ce qui concerne la contrainte de von Mises) en prenant avantage des points suivants :

- La forme de la fonction de densité de probabilité de la réponse est la même que celle de l'excitation, c'est-à-dire gaussienne et de moyenne nulle. Alors la fonction de densité de probabilité n'est définie que par son écart-type.
- Comme la moyenne de la réponse est nulle, sa valeur efficace équivaut à son écart-type.

En résumé, la valeur efficace de la réponse calculée permet de décrire complètement sa fonction de densité de probabilité.

2.5 Conclusion

Même si l'analyse numérique des structures soumises à une excitation aléatoire est un domaine relativement récent, plusieurs ingénieurs et scientifiques se sont attardés à trouver des méthodes de calculs à la fois efficaces et précises. Ce chapitre fait un état non exhaustif de leurs recherches et travaux dans le domaine. L'explication théorique des méthodes retenues sera effectuée au chapitre 4 de ce mémoire.

De ce chapitre, il est important de retenir les points suivants :

- Les méthodes de calcul traitant les problèmes dynamiques déterministes peuvent être employées afin de calculer la FRF d'une structure déterministe.
- L'étape cruciale permettant d'augmenter l'efficacité de la méthode d'analyse de structures excitées aléatoirement se situe au niveau de l'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse. Des algorithmes analytiques, qui ont la prétention d'être plus rapides et plus précis, permettent d'effectuer cette intégration.

Le chapitre suivant définit les objectifs spécifiques, et les hypothèses formulées dans le contexte du projet.

Chapitre 3

Objectifs du projet

Après avoir pris connaissance de l'état de l'art dans le domaine, il est possible de définir l'objectif général et les objectifs spécifiques de la recherche.

3.1 Objectif général

L'objectif général du projet de maîtrise consiste au développement d'une méthode efficace permettant de calculer et d'analyser la réponse d'une structure linéaire soumise à une excitation aléatoire stationnaire à la base en utilisant la méthode des éléments finis. La méthode développée devra être efficace à ce qui a trait au temps de calcul, générer des résultats exacts, être simple d'emploi et innovatrice.

3.2 Objectifs spécifiques

Les objectifs spécifiques définissent les étapes intermédiaires du projet qui permettront d'atteindre l'objectif principal:

1. La méthode de calcul engendrée par ce projet de recherche doit être en mesure de calculer efficacement les valeurs efficaces et les valeurs associées à un niveau de confiance quelconque (par exemple, la valeur 3σ) des résultats suivants:

- déplacements
- vitesses
- accélérations
- forces associées aux conditions frontières (SPC)
- forces associées aux conditions de cinématique (MPC)
- forces nodales (Grid Point Forces)
- forces élémentaires
- contraintes élémentaires
- déformations élémentaires
- contraintes élémentaires de von Mises

Le tableau 3.1 définit, pour chacun des résultats élémentaires, quels sont les éléments qui doivent être considérés:

TABLEAU 3.1 RÉSULTATS ÉLÉMENTAIRES ASSOCIÉS À CHACUN DES ÉLÉMENTS

Élément fini	Contrainte	Contrainte de von Mises	Déformation	Force
CBAR		X		X
CBEAM	X	X		X
CBEND	X	X		X
CBUSH	X		X	X
CELAS1	X			X
CELAS2	X			X
CHEXA	X	X	X	
CONROD	X	X		X
CPENTA	X	X	X	
CQUAD4	X	X	X	X
CQUAD8	X	X	X	X
CQUADR	X	X	X	X
CROD	X	X		X
CSHEAR	X	X		X
CTETRA	X	X	X	
CTRIA3	X	X	X	X
CTRIA6	X	X	X	X
CTRIAR	X	X	X	X
CTUBE	X	X		X

2. La méthode utilisée devra prendre en compte le phénomène de troncature des modes, afin d'atténuer son effet pour les cas où le chargement dynamique a des effets quasi-statiques prédominants.
3. L'algorithme devra être en mesure de calculer la valeur de la contrainte de von Mises pour l'excitation aléatoire spécifiée. À partir de la contrainte de von Mises et d'autres paramètres pertinents, le code devra être en mesure de calculer les marges de sécurité.
4. Les résultats devront être générés sous une forme simple, afin de faciliter l'analyse de la structure étudiée. Des outils externes, comme I-DEAS, EXCEL et les pages en format HTML, peuvent être mis à contribution afin de faciliter cette analyse.

3.3 Hypothèses formulées

Comme dans tout problème d'ingénierie, des hypothèses doivent être formulées afin de simplifier le cas étudié. Ces hypothèses sont :

1. Les structures visées par ce projet de maîtrise sont linéaires. C'est-à-dire qu'elles respectent les principes de superposition et de proportionnalité.
2. Les propriétés physiques des structures concernées doivent être connues et constantes.
3. La structure est soumise à une seule excitation à la base, et ce dans une seule direction de translation à la fois. Cette excitation doit être une accélération aléatoire stationnaire, *ergodique*, de densité de probabilité gaussienne et de moyenne nulle. De plus, celle-ci doit pouvoir être représentée par une série de segments linéaires dans une échelle log-log.

4. Les structures sont faiblement amorties. L'amortissement de type visqueux est modélisé selon une approche modale.

3.4 Méthodologie retenue

La méthodologie qui doit être utilisée peut être élaborée à partir des spécifications énumérées précédemment et de l'état des connaissances effectué au chapitre 2.

- Les modes propres et les fréquences naturelles doivent être calculés numériquement à partir d'un modèle d'éléments finis de la structure. Cette analyse modale doit être effectuée obligatoirement par le logiciel MSC/NASTRAN (SOL 103). Les termes nécessaires à l'analyse faisant intervenir explicitement les matrices de masse et de rigidité seront aussi calculés par MSC/NASTRAN.
- Le problème dynamique, permettant l'obtention de la fonction de transfert, sera résolu par l'approche modale afin d'obtenir un système d'équations découplées. Le terme d'amortissement modal sera spécifié par l'utilisateur.
- Les fonctions de densité spectrale de puissance de la réponse seront intégrées par une méthode numérique, une méthode analytique ou une méthode numérique améliorée, selon le choix de l'utilisateur. Les trois méthodes doivent être implantées, car leurs performances sont grandement affectées par la forme de la densité spectrale de puissance de l'excitation. L'effet de troncature doit être considéré par les trois méthodes, et calculé en utilisant l'approche de la flexibilité résiduelle. L'ajout de cette contribution sera laissé à la discrétion de l'utilisateur.
- Le calcul de la contrainte de von Mises s'effectuera selon une méthode de type Monte-Carlo et selon une approche récente. La méthode de Monte-Carlo permettra de valider les résultats obtenus par l'autre méthode. Même si l'approche analytique semble plus performante, la

méthode de Monte-Carlo sera conservée dans l'algorithme final. En effet, malgré sa performance, cette méthode analytique est très récente et pourrait créer des difficultés dans des cas spécifiques inconnus à ce jour.

Chapitre 4

Conception de l'algorithme

4.1 Introduction

L'analyse du comportement d'une structure excitée à la base de façon aléatoire nécessite le calcul de la valeur efficace de plusieurs centaines de variables, voire des milliers. Comme chacune de ces valeurs s'obtient à la suite d'une très longue série d'opérations mathématiques relativement complexes, il est impensable d'effectuer celles-ci manuellement. Il est donc nécessaire de concevoir une méthode numérique efficace. Ce chapitre abordera les grandes sections de l'algorithme qui ont été développées, ainsi que les principales théories derrière celles-ci.

4.2 Données préliminaires

La résolution des équations (2.40) à (2.42) nécessite la connaissance de certains paramètres initiaux. Dans le cadre de ce projet, ces données proviennent de deux sources: d'une analyse modale effectuée numériquement avec l'aide de MSC/NASTRAN (à laquelle un DMAP a été ajouté) et d'un fichier généré par l'utilisateur. Chacune de ces différentes sources de données est approfondie aux points suivants.

4.2.1 Fichier usager

Comme son nom l'indique, le fichier usager contient les données nécessaires qui ne peuvent être fournies que par la personne effectuant l'analyse. Ce fichier, de type ASCII, contient les informations qui sont ordonnées d'une façon précise et doit être créé manuellement par l'utilisateur. Une interface pourrait être conçue afin de faciliter la génération de ce fichier, mais cette étape sort largement du cadre de ce projet.

Les principales données figurant dans ce fichier sont les suivantes:

- La plage de fréquences sur laquelle s'effectue l'analyse. Cette bande de fréquences se spécifie simplement en mentionnant les valeurs des fréquences, en Hz, délimitant la bande de fréquences;
- La densité spectrale de l'excitation. Elle se définit en spécifiant chacun des segments linéaires, dans une échelle log-log, qui la compose en identifiant la fréquence et la valeur de la DSP aux extrémités du segment. Il est possible de substituer une de ces quatre valeurs par la pente du segment (en dB/oct.);
- Les modes retenus pour effectuer la superposition modale;
- La définition du facteur d'amplification Q ;
- Les types de résultats (accélérations, contraintes...) dont les valeurs efficaces doivent être calculées;
- Les nœuds et les éléments retenus pour l'analyse (figure 4.1).

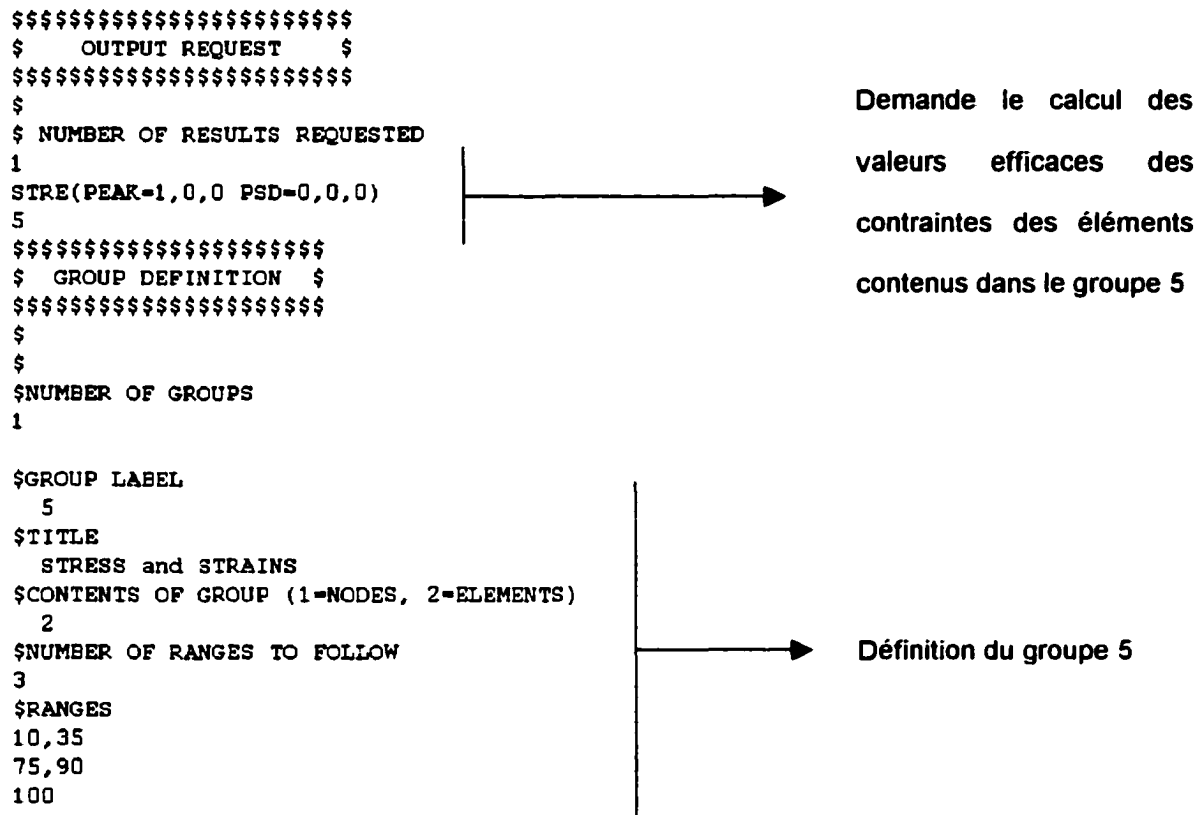


Figure 4.1 Exemple d'une partie du fichier usager utilisé par l'algorithme développé

La figure 4.1 illustre la méthode utilisée dans l'algorithme développé afin de spécifier les résultats qui doivent être calculés lors de l'analyse. Dans cet exemple, les valeurs efficaces de contraintes associées aux éléments identifiés par le numéro 10 à 35, 75 à 90 ainsi que l'élément 100 seront calculées. Cette façon de procéder est beaucoup plus simple et rapide que celle utilisée par MSC/NASTRAN, et illustrée à la figure 1.1.

Plusieurs autres paramètres peuvent être spécifiés par l'utilisateur, comme ceux nécessaires à la génération des graphiques de la DSP de la réponse. Il en sera fait mention dans ce présent chapitre aux endroits opportuns. Le lecteur intéressé à avoir un aperçu de l'allure de ce fichier pourra consulter l'annexe de ce mémoire où il est possible de trouver un fichier usager type.

4.2.2 Analyse modale

La méthode de superposition modale ayant été privilégiée afin d'analyser la structure, la première étape consiste à effectuer une analyse modale de celle-ci. Cette analyse doit être faite par le logiciel MSC/NASTRAN. Elle permettra d'obtenir:

- les fréquences naturelles de la structure,
- les modes propres de la structure associées à chacune des variables devant être calculées.

L'algorithme a la capacité de lire ces informations qui sont contenues dans le fichier binaire de résultats (le fichier ayant habituellement comme extension *.op2*) généré par MSC/NASTRAN. L'utilisateur doit spécifier un paramètre (PARAM,POST,-2) [13] qui force MSC/NASTRAN à écrire les données dans le fichier binaire selon un ordre précis et connu. De l'ensemble des données contenues dans ce fichier, seules les données relatives aux modes, aux éléments et aux nœuds spécifiés par l'utilisateur sont conservées par l'algorithme. Finalement, l'analyse modale est dite *contrainte* parce que le nœud situé à la base de la structure modélisée doit être encastré dans toutes les directions.

4.2.3 Programmation dans MSC/NASTRAN - DMAP

Le logiciel d'éléments finis MSC/NASTRAN possède son propre langage de programmation, plus connu sous le nom de DMAP [14] (Direct Matrix Abstraction Program). Par l'intermédiaire du DMAP, il est possible d'effectuer par MSC/NASTRAN des calculs pour lequel ce dernier n'a pas été programmé originellement. Dans le cas présent, un DMAP a été utilisé afin d'obtenir des résultats faisant intervenir des matrices pouvant être gigantesques, comme les matrices de masse et de rigidité. Comme ces matrices sont partagées en DDL (degrés de liberté) internes et DDL frontières, les DDL frontières sont spécifiés en utilisant une carte *USET1* [13] dans MSC/NASTRAN.

Le DMAP permet de calculer les modes rigides géométriques qui sont obtenus en utilisant l'équation (2.6). L'analyse modale étant effectuée en encastrant la structure à sa base, les modes rigides ne sont pas calculés par MSC/NASTRAN. Le DMAP doit calculer l'accélération quasi-statique, pour l'ensemble des DDL, causée par une accélération unitaire imposée au DDL frontière. Cette accélération est calculée selon les trois directions de translation indépendantes du système de coordonnées de base de MSC/NASTRAN. Les facteurs de participation modale sont aussi calculés par MSC/NASTRAN par l'intermédiaire du DMAP. Pour un DDL frontière donné et une direction d'excitation spécifique, le vecteur contenant les facteurs de participation modale associés à chacun des modes est le suivant:

$$\{\Gamma\} = [\phi_c]^T \left([M_{ii}] [K_{ii}]^{-1} [K_{if}] - [M_{if}] \right) \quad (4.1)$$

Finalement, le DMAP calcule la composante de flexibilité résiduelle associée à chacun des types de résultats pouvant être calculés par l'algorithme. Cette composante est en fait la dernière partie de l'équation (2.27), soit:

$$[K_{ii}]^{-1} \{\hat{G}\} - [\phi_c^R] [\Lambda_c^R]^{-1} [\phi_c^R]^T \{\hat{G}\}$$

4.3 Calcul de la valeur efficace des variables

Il est possible d'obtenir la valeur efficace des variables en employant différentes méthodes de calcul. Le choix de la méthode se spécifie à l'intérieur du fichier usager, et il est entièrement laissé à la discrétion de l'utilisateur. Ces méthodes de calculs sont abordées aux sections suivantes.

4.3.1 Méthode d'intégration numérique

Cette méthode d'intégration consiste simplement à effectuer l'intégration de la densité spectrale de puissance de la réponse par une méthode d'intégration dite numérique. De nombreuses méthodes numériques permettent d'intégrer des fonctions, les plus connues étant sans aucun doute la méthode de trapèzes et celles de Simpson. Les méthodes d'intégration numérique nécessitent de calculer la DSP de la réponse.

Calcul de la densité spectrale de puissance de la réponse

La DSP de la réponse se calcule en faisant intervenir les relations (2.40) à (2.42). Parce que ce projet s'intéresse spécifiquement au cas où l'excitation est une accélération à la base dans une seule direction à la fois, celles-ci se réduisent à:

$$\left(\sigma_y^d\right)_x^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Psi_{yj} \Psi_{yk} \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} \int_0^{\infty} h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.2)$$

$$\left(\sigma_y^x\right)_x^2 = A_{yx}^2 \int_0^{\infty} \omega^{-4} S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.3)$$

$$\text{cov}(y^x, y^d)_x = - \sum_{j=1}^n \Psi_{yj} A_{yx} \Gamma_{jx} \int_0^{\infty} \omega^{-2} h_j(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.4)$$

Même si ces dernières équations représentent exactement les diverses composantes de l'équation qui doivent être utilisées afin d'obtenir la valeur efficace, en ce qui concerne l'intégration numérique, il est plus facile d'aborder le problème en utilisant l'équation (2.36). Cette dernière équation peut se récrire sous une forme légèrement différente:

$$S_{yy_i}(\omega) = H_x^*(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) H_x(\omega) \quad (4.5)$$

où

$H_x^*(\omega)$ est le complexe-conjugué de la fonction de transfert $H_x(\omega)$ selon la direction d'excitation x .

$S_{yy_i}(\omega)$ représente la densité spectrale de puissance de la réponse de la variable y selon la direction d'excitation x .

Ainsi, la densité spectrale de puissance de la réponse, à une fréquence précise, pour une variable quelconque est le produit de la fonction de transfert de cette variable, multiplié par son complexe-conjugué et par la valeur de la densité spectrale de puissance de l'excitation évaluée à cette même fréquence.

La fonction de transfert est la relation entre l'entrée d'un système, et la réponse de ce système causée par cette entrée. Dans le cas étudié présentement, l'entrée est une accélération alors que la réponse sera le type de résultat calculé:

$$H_x(\omega) = \frac{y_x(\omega)}{\ddot{x}_f(\omega)} \quad (4.6)$$

où

$y_x(\omega)$ représente la réponse du système pour une excitation en x .

$\ddot{x}_f(\omega)$ représente l'accélération à la base de la structure.

Si on impose à la base une accélération unitaire, la réponse ainsi obtenue sera exactement égale à la FRF. Tel que mentionné précédemment, il est avantageux de mettre à profit les équations développées au second chapitre de ce présent mémoire. Ces équations traitent du calcul de la

réponse d'une structure accélérée à la base de façon déterministe qui peuvent être utilisées afin de calculer la fonction de transfert.

En utilisant le principe de la superposition modale énoncé à l'équation (2.12) et en utilisant la relation figurant à l'équation (4.6), la partie dynamique de la fonction de transfert reliant l'accélération à la base au déplacement des nœuds pour une excitation selon la direction x s'évalue de la façon suivante:

$$\{H_x^d\} = [\phi_c] \{q_x\} \quad (4.7)$$

Lorsque l'excitation est une accélération unitaire par rapport à x , la coordonnée modale en fonction de la fréquence associée à un mode z se calcule ainsi:

$$q(\omega)_x = \frac{\Gamma_{z,x}}{\omega_z^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_z\omega}{Q_z}} \quad (4.8)$$

où

- $\Gamma_{z,x}$ Facteur de participation modale associée au $z^{\text{ième}}$ mode retenu, calculé selon la direction de l'excitation x
- ω_z Fréquence naturelle associée au $z^{\text{ième}}$ mode retenu
- Q_z Facteur d'amplification associé au $z^{\text{ième}}$ mode retenu

En insérant l'équation (4.8) dans l'équation (4.7), et en développant pour la variable y :

$$H_{yx}^d(\omega) = \frac{\Gamma_{1,x}\phi_{cy}^1}{\omega_1^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_1\omega}{Q_1}} + \frac{\Gamma_{2,x}\phi_{cy}^2}{\omega_2^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_2\omega}{Q_2}} + \dots + \frac{\Gamma_{n,x}\phi_{cy}^n}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_n\omega}{Q_n}} \quad (4.9)$$

$$H_{yx}^d(\omega) = \sum_{\text{modes retenus}} \frac{\Gamma_{n,x}\phi_{cy}^n}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_n\omega}{Q_n}}$$

où

ϕ_{cy}^n Composante du $n^{\text{ième}}$ mode propre ϕ_c retenu associée à la variable y

Il est important de spécifier que la sommation ne s'effectue pas nécessairement sur les n premiers modes, mais plutôt sur les n modes retenus par l'utilisateur, modes qui peuvent être quelconques parmi ceux calculés par MSC/NASTRAN lors de la décomposition modale. Par contre, le calcul effectué en ne retenant pas les premiers modes de la structure ne sera pas exact mais donnera une bonne approximation dans plusieurs cas. Pour le cas où la valeur efficace d'un déplacement, d'une vitesse ou d'une accélération est calculée, l'étape suivante consiste à ajouter à la fonction de transfert la composante quasi-statique:

$$H_{yx}(\omega) = \left[\sum_{\text{modes retenus}} \frac{\Gamma_{nx}\phi_{cy}^n}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_n\omega}{Q_n}} \right] - \frac{A_{yx}}{\omega^2} \quad (4.10)$$

où

A_{yx} est la composante d'accélération *quasi-statique* associée au DDL y , calculée pour une excitation unitaire selon x .

Si l'utilisateur désire prendre en compte l'effet de troncature des modes, la composante reliée à la flexibilité résiduelle, calculée selon l'équation (2.27), s'ajoute à la fonction de transfert de la façon suivante:

$$H_{yx}(i\omega) = \left[\sum_{\text{modes retenus}} \frac{\Gamma_{nx} \phi_{cy}^n}{\omega_n^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_n \omega}{Q_n}} \right] - \frac{A_{yx}}{\omega^2} + R_{yx} \quad (4.11)$$

où

R_{yx} est la contribution de la flexibilité résiduelle associée à la variable y , calculée pour une excitation unitaire selon x .

Le DMAP calcule les facteurs de participation modale, les composantes d'accélération *quasi-statique* ainsi que les valeurs de flexibilité résiduelle associées à une accélération unitaire dans les trois directions de translation (X, Y et Z) du système de coordonnées de référence de MSC/NASTRAN (*Basic coordinate system*). Dans l'éventualité où la direction d'excitation ne coïnciderait pas directement avec un des axes de ce système de coordonnées, il est possible de projeter dans la direction d'excitation chacune des quantités précédentes. Il suffit de multiplier, terme à terme, chacune des trois composantes définissant cette quantité par le vecteur unitaire définissant la direction de l'excitation qui lui est associé (figure 4.2).

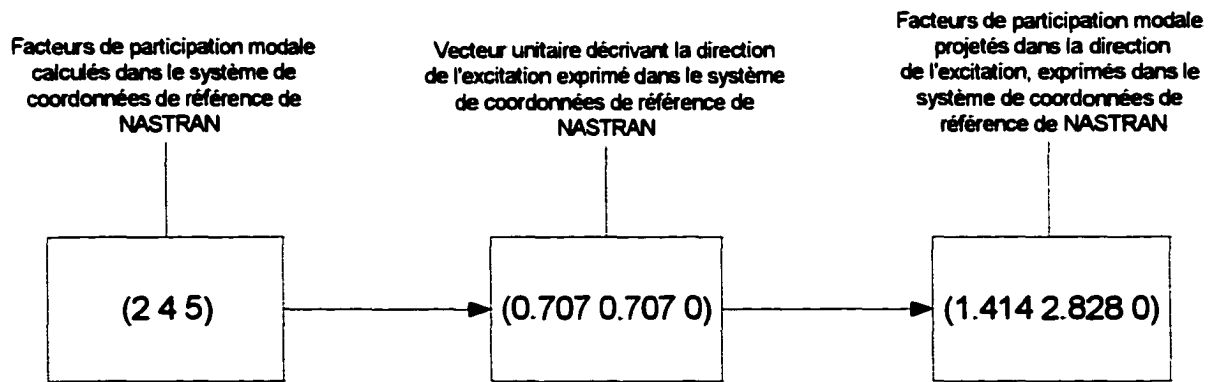


Figure 4.2 Méthode de projection type appliquée aux facteurs de participation modale

Finalemeht, la densité spectrale de puissance de la réponse s'obtient en multipliant cette fonction de transfert (équation (4.11)) par son complexe-conjugué, ainsi que par la valeur de la densité spectrale de puissance de l'excitation à la fréquence spécifique.

La méthode de calcul est toujours la même. Que ce soit une valeur efficace de déplacement, de contrainte ou d'un tout autre résultat qui soit traité, l'équation (4.9) demeure valide. En effet, comme le stipule l'équation (2.46), il suffit d'utiliser dans l'équation le vecteur propre associé au type de résultat que l'on veut calculer. Il n'y a que trois exceptions: le calcul des valeurs efficaces de la contrainte de von Mises, de vitesse et d'accélération. Le calcul de la contrainte de von Mises s'effectue à l'aide d'autres méthodes qui seront présentées ultérieurement. En ce qui concerne les deux dernières exceptions, la densité spectrale de puissance de la réponse s'obtient en effectuant en premier lieu le calcul à l'aide des vecteurs propres de déplacement et par la suite en utilisant la relation suivante pour la vitesse:

$$S_{\dot{y}\dot{y}}(\omega) = \omega^2 S_{yy}(\omega) \quad (4.12)$$

et celle-ci pour l'accélération:

$$S_{\ddot{y}\ddot{y}}(\omega) = \omega^4 S_{yy}(\omega) \quad (4.13)$$

où

$S_{yy}(\omega)$ représente la densité spectrale de puissance de la réponse associée au déplacement.

Pour conclure ce point, si la contribution *quasi-statique* n'est pas incluse dans le calcul des valeurs efficaces des variables primaires, alors la densité spectrale de puissance calculée sera relative au point d'excitation, et non absolue par rapport au repère fixe dans lequel la structure est excitée.

Intégration numérique de la DSP de la réponse

L'intégration numérique de la densité spectrale de puissance de la réponse s'effectue en utilisant l'algorithme adaptatif de Gauss-Kronrod [15] (1983). Cet algorithme choisit lui-même ses points sur la courbe à intégrer afin d'obtenir la précision demandée. Le choix de cet algorithme repose principalement sur le fait qu'il a déjà été utilisé avec succès [5] afin d'intégrer des fonctions similaires.

Une des différentes fonctionnalités de cet algorithme est de proposer plusieurs règles d'intégration qui définissent le nombre de points devant être utilisés dans l'intervalle considéré. Dans le cadre de ce projet, l'intégration locale s'effectue à l'aide de la règle de Kronrod de 30-61 points. Ce choix sur la règle à utiliser aurait pu être laissé à la discrétion de l'utilisateur, mais celle-ci a été fixée afin de simplifier l'utilisation de l'algorithme à ceux qui sont moins familiers avec cette méthode d'intégration. En théorie, l'utilisation de cette règle spécifique devrait permettre d'obtenir des résultats plus précis. Par contre, les quelques essais effectués en variant ce paramètre tendent à démontrer, pour le cas étudié, que celui-ci a peu d'influence sur le temps de calcul et sur la précision des résultats générés.

Finalement, les fréquences naturelles causant généralement des points d'inflexion sur la courbe de la DSP pour les structures faiblement amorties dont les modes sont faiblement couplés, il a été pris avantage de la connaissance de ces dernières afin d'augmenter la précision obtenue. Ces points peuvent provoquer des difficultés probables d'intégration numérique à ce qui a trait à la précision des résultats calculés et même empêcher la convergence de la méthode. Cette situation a été atténuée en fragmentant la bande de fréquences étudiée en plusieurs sous-domaines d'intégration, chacun borné par les fréquences naturelles de la structure.

4.3.2 Méthode d'intégration analytique

Les méthodes d'intégration numériques étant parfois imprécises et surtout très coûteuses au niveau du temps de calcul, une seconde approche a été développée afin d'intégrer efficacement les courbes de densité spectrale de puissance. Cette méthode consiste à effectuer une intégration analytique, au lieu d'une intégration numérique.

Théorie et implantation de la méthode d'intégration analytique

La méthode analytique retenue est celle de Chen et Ali [5] (1998). Cette méthode analytique, comparativement aux autres méthodes analytiques présentées dans la littérature a comme avantage principal qu'elle s'applique directement aux spectres d'excitation rencontrés habituellement dans le domaine de l'aérospatiale. Cette section vise à expliquer la procédure utilisée afin d'intégrer analytiquement la densité spectrale de la réponse.

Contrairement à la méthode d'intégration numérique, la méthode d'intégration analytique aborde le problème comme étant plutôt une somme d'intégrales des contributions modales. La première étape dans l'explication de cette théorie consiste à ne conserver que les termes inclus dans les intégrales des équation (4.2) à (4.4) qui sont une fonction de ω . Les relations suivantes sont obtenues :

$$\lambda_{n,jk} = \int_0^{\infty} \omega^n h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.14)$$

$$\xi_n = \int_0^{\infty} \omega^{n-4} S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.15)$$

$$\eta_{n,j} = \int_0^{\infty} \omega^{n-2} h_j(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.16)$$

Le facteur ω^n qui a été ajouté à chacune de ces équations sert à évaluer les valeurs efficaces de vitesse et d'accélération, comme démontré par les équations (4.12) et (4.13). Ces valeurs ne sont en fait que des moments spectraux des équations de base. Ainsi, la valeur efficace de la vitesse se calcule en fixant n à 2, alors que pour l'accélération, n doit valoir 4 (pour le déplacement et toutes les variables secondaires, n vaut 0).

Le principe fondamental derrière l'intégration analytique est que chacune des équations (4.14) à (4.16) peut se développer sous une forme rationnelle. Ce développement est effectué, à titre d'exemple, pour l'équation (4.14) :

$$\lambda_{n,jk} = \int_0^{\infty} \omega^n \frac{1}{\omega_j^2 - \omega^2 - \frac{i\omega_j\omega}{Q_j}} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_k\omega}{Q_k}} S_{\ddot{x}_f\ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.17)$$

Les racines du dénominateur de la fonction de transfert modale et de son complexe-conjugué se déterminent en utilisant la formule mathématique permettant de calculer les racines d'une fonction quadratique:

$$racines = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.18)$$

Ainsi les racines sont:

- Pour $h_j^*(\omega)$

$$\Omega_1 = \omega_j \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_j}\right)^2} - \frac{i\omega_j}{2Q_j} \quad \Omega_2 = -\omega_j \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_j}\right)^2} - \frac{i\omega_j}{2Q_j} \quad (4.19)$$

- Pour $h_k(\omega)$

$$\Omega_3 = \omega_k \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_k}\right)^2} + \frac{i\omega_k}{2Q_k} \quad \Omega_4 = -\omega_k \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_k}\right)^2} + \frac{i\omega_k}{2Q_k} \quad (4.20)$$

En insérant les valeurs des racines dans l'équation (4.17), on obtient:

$$\lambda_{n,jk} = \int_0^\infty \omega^n \frac{1}{(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)(\omega - \Omega_3)(\omega - \Omega_4)} S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.21)$$

La pierre angulaire de cette méthode analytique consiste à développer le dénominateur en fractions partielles [16]:

$$\frac{1}{(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)(\omega - \Omega_3)(\omega - \Omega_4)} = \frac{A}{(\omega - \Omega_1)} + \frac{B}{(\omega - \Omega_2)} + \frac{C}{(\omega - \Omega_3)} + \frac{D}{(\omega - \Omega_4)} \quad (4.22)$$

où

$$A = \frac{1}{(\Omega_1 - \Omega_2)(\Omega_1 - \Omega_3)(\Omega_1 - \Omega_4)}, \quad B = \frac{1}{(\Omega_2 - \Omega_1)(\Omega_2 - \Omega_3)(\Omega_2 - \Omega_4)}$$

$$C = \frac{1}{(\Omega_3 - \Omega_1)(\Omega_3 - \Omega_2)(\Omega_3 - \Omega_4)}, \quad D = \frac{1}{(\Omega_4 - \Omega_1)(\Omega_4 - \Omega_2)(\Omega_4 - \Omega_3)}$$

L'équation (4.21) devient alors:

$$\lambda_{n,jk} = \int_0^\infty \frac{A\omega^n S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)}{(\omega - \Omega_1)} d\omega + \int_0^\infty \frac{B\omega^n S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)}{(\omega - \Omega_2)} d\omega +$$

$$\int_0^\infty \frac{C\omega^n S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)}{(\omega - \Omega_3)} d\omega + \int_0^\infty \frac{D\omega^n S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)}{(\omega - \Omega_4)} d\omega \quad (4.23)$$

Cette transformation permet d'obtenir une somme d'intégrales simples dont les réponses analytiques sont connues. Une fois la valeur de l'intégrale calculée, il suffit de la multiplier avec les différentes constantes modales (vecteurs propres et facteurs de participation modale) figurant dans l'équation (4.2), et de recommencer la procédure jusqu'à ce que tous les termes de la sommation aient été traités. Une procédure similaire s'applique aux équations (4.15) et (4.16) afin de les rendre facilement intégrables analytiquement.

La principale limite de cette méthode provient de la forme de la densité spectrale de puissance de l'excitation $S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)$ qui peut être traitée. Une forme quelconque de la DSP de l'excitation pourrait rendre l'intégration analytique de l'équation (4.23) très difficile, voire impossible. Pour le cas d'une DSP composée de segments linéaires dans une échelle log-log, spectre fréquemment utilisé en aérospatiale (figure 4.3), les auteurs de la méthode ont proposé une solution.

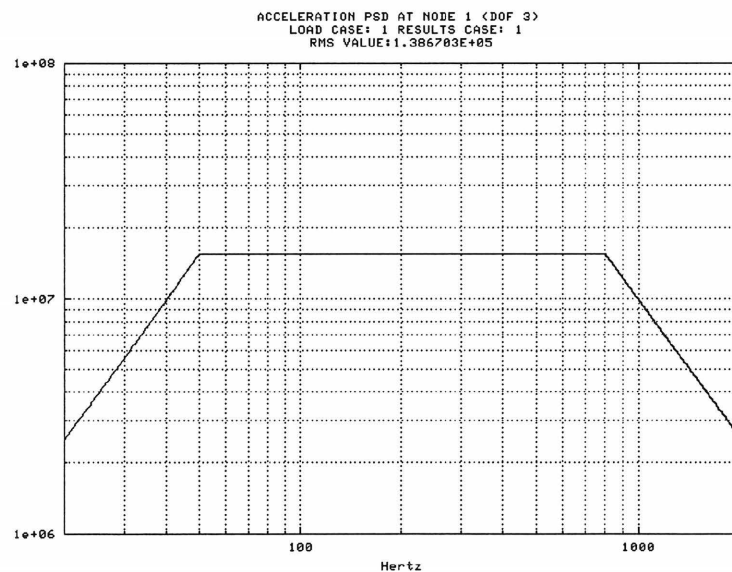


Figure 4.3 Exemple type d'une DSP d'excitation

Cette solution consiste à calculer l'intégrale segment par segment en effectuant préalablement une approximation de chacun de ceux-ci par un polynôme. L'équation de ce dernier se détermine en utilisant la méthode des moindres carrés [17] [18]:

$$S_{\tilde{x}_f, \tilde{x}_f}(\omega) = a + b\omega + c\omega^2 + \dots + d\omega^n \quad (4.24)$$

Si l'expression polynomiale obtenue représente fidèlement la courbe réelle de la densité spectrale de puissance, alors la réponse calculée sera exacte. Dans le cas contraire, la réponse obtenue sera une approximation de la véritable réponse.

Modification de la théorie afin de prendre en compte l'effet de la flexibilité résiduelle

La théorie développée en [5] ne tient pas compte de la contribution de la flexibilité résiduelle qui peut être ajoutée afin d'améliorer les résultats obtenus. Pour inclure cette contribution, l'équation (2.39) a été reprise en tenant compte de cette nouvelle composante:

$$\left(\sigma_y^2\right)_x = \left(\sigma_y^s\right)_x^2 + \left(\sigma_y^d\right)_x^2 + \left(\sigma_y^r\right)_x^2 + 2\text{cov}(y^s, y^d)_x + 2\text{cov}(y^s, y^r)_x + 2\text{cov}(y^d, y^r)_x \quad (4.25)$$

où

L'indice r représente la contribution associée à la flexibilité résiduelle.

Les nouveaux termes de cette équation s'évaluent ainsi:

$$\left(\sigma_y^r\right)_x^2 = \left(R_{yx}\right)^2 \int_0^{\infty} S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.26)$$

$$\text{cov}(y^s, y^r)_x = -A_{yx} R_{yx} \int_0^{\infty} \omega^{-2} S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.27)$$

$$\text{cov}(y^r, y^d)_x = \sum_{j=1}^n \Psi_{yx} \Gamma_{jx} \int_0^{\infty} h_j(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.28)$$

L'intégration analytique de ces équations permettant de prendre en compte l'effet de la flexibilité résiduelle s'effectue en appliquant la même méthode que celle démontrée précédemment, c'est-à-dire une intégration par fractions partielles.

4.4 Calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises

Pour les matériaux ductiles, un des critères d'effondrement très utilisé dans le domaine de l'ingénierie est sans aucun doute le critère de von Mises. L'utilisation de ce critère permet de calculer les marges de sécurité de la structure et d'en déterminer si la structure résistera au chargement qui lui sera imposé.

4.4.1 Problématique du calcul de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire

Sous un chargement statique, la façon de calculer la contrainte de von Mises nécessite uniquement la connaissance du tenseur de contrainte et le calcul s'effectue directement en employant l'équation suivante:

$$\sigma_{vm}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (4.29)$$

où

σ_x représente la contrainte normale selon la direction x

τ_{xy}^2 représente la contrainte de cisaillement en y sur la surface perpendiculaire à x

Pour la conception d'une structure soumise à un chargement aléatoire, il serait possible de calculer la combinaison des contraintes linéaires qui engendrerait la valeur maximale de la contrainte de von Mises. Par contre, la valeur ainsi obtenue serait probablement trop conservatrice compte tenu de la faible probabilité que cette combinaison précise se produise. Ce conservatisme ne peut être toléré dans le domaine aérospatial, et le calcul de la contrainte de von Mises ayant une probabilité plus élevée d'être observée est beaucoup plus complexe. Les raisons qui expliquent cette complexité au niveau du calcul de la valeur efficace de cette contrainte pour une excitation aléatoire furent décrites au chapitre 2.

Présentement, deux méthodes permettent de calculer, d'une façon plus exacte, la valeur efficace de la contrainte de von Mises. La première méthode [19](1998) génère statistiquement un nombre élevé d'échantillons de cette contrainte. De ces échantillons, la fonction de densité de probabilité est extraite afin de déterminer les différents paramètres statistiques nécessaires au calcul de la valeur efficace et de la valeur maximale. La deuxième méthode [20](2000) utilise une approche axée davantage sur les mathématiques grâce à une technique découplant les variables impliquées dans le calcul de la contrainte de von Mises. Les deux approches sont expliquées plus en détails dans les sections suivantes.

4.4.2 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode statistique consistant à calculer un grand nombre d'échantillons de la contrainte de von Mises associée à l'élément étudié. De cette population, il est possible d'en extraire les paramètres statistiques pertinents à l'analyse, et même d'en établir

la fonction de densité de probabilité. Comme une formule explicite relie la contrainte de von Mises aux composantes du tenseur de contraintes, le temps de calcul nécessaire pour chaque échantillon n'est pas élevé. La méthode générale utilisée afin de générer les échantillons se résume de la façon suivante [21]:

Soit une valeur quelconque :

$$X(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (4.30)$$

qui est fonction de m sous-variables ayant chacune comme fonction de densité de probabilité une distribution normale, et dont les propriétés statistiques de chacune des ces variables sont définies par:

- le vecteur moyenne

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \quad (4.31)$$

- la matrice de covariances

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{mi} & \dots & & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Le vecteur X s'obtient en utilisant un théorème fondamental de l'analyse statistique des problèmes à variables multiples qui stipule que si:

$$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \quad (4.33)$$

un vecteur composé de variables normales dont chacune possède une moyenne nulle, et possède comme matrice de covariances la matrice identité:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}_{mm} \quad (4.34)$$

alors X , possédant un vecteur moyenne μ , et une matrice de covariances Δ , peut être représenté comme suit:

$$\{X\} = [D]\{Z\} + \{\mu\} \quad (4.35)$$

où

$$[\Delta] = [D][D]^T \quad (4.36)$$

L'application de cette théorie au calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire est expliquée au point suivant.

Implantation

En utilisant la théorie développée au point précédent et en utilisant l'équation (4.29), il apparaît que la contrainte de von Mises peut s'exprimer comme étant égal à :

$$\sigma_{vm}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \quad (4.37)$$

La contrainte de von Mises est fonction de six contraintes (pour le cas d'un élément solide), chacune possédant une fonction de densité de probabilité normale et une moyenne nulle. La valeur efficace étant la racine carré de la variance, les termes sur la diagonale de la matrice de covariances (c'est-à-dire les variances) s'obtiennent en utilisant directement l'équation (4.2). Les termes se situant à l'extérieur de cette diagonale, les covariances, se calculent à l'aide d'une variante de cette dernière équation:

$$\text{cov}(\sigma_y, \sigma_z)_x = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Psi_{yj} \Psi_{zk} \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} \int_0^{\infty} h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.38)$$

où

$\text{cov}(\sigma_y, \sigma_z)_x$ représente le terme de covariance associé aux composantes de contrainte y et z, pour une excitation selon l'axe x.

L'étape suivante consiste à déterminer la matrice D telle que définie par l'équation (4.36). Dans la littérature, on identifie souvent cette étape comme étant *la décomposition de Cholesky* ou *l'extraction de la racine carrée* d'une matrice. Cependant, la méthode généralement employée permettant d'effectuer cette décomposition ne s'applique qu'aux matrices définies strictement positives, c'est-à-dire une matrice dont les valeurs propres sont toutes supérieures à zéro.

En pratique, il arrive souvent que la matrice qui doit être décomposée soit définie semi-positive, donc que ses valeurs propres soient supérieures ou égales à zéro. Par exemple, deux contraintes qui sont parfaitement corrélées, ou dépendantes, auront comme effet de rendre nulle une des valeurs propres de la matrice de covariances.

Une solution a été trouvée afin de surmonter cette difficulté. La première étape consiste à effectuer une décomposition par valeurs singulières [22] (qui pour ce cas précis est équivalente à une décomposition modale) de la matrice de covariances:

$$\begin{aligned} [\Delta] &= [\phi][\lambda][\phi]^T \\ [\phi]^T [\Delta] [\phi] &= [\lambda] \end{aligned} \quad (4.39)$$

où

- $[\Delta]$ représente la matrice des covariances définie semi-positive
- $[\phi]$ représente la matrice des vecteurs propres
- $[\lambda]$ représente la matrice diagonale des valeurs propres

En pré-multipliant par la matrice des vecteurs propres:

$$[\phi][\phi]^T [\Delta][\phi] = [\phi][\lambda] \quad (4.40)$$

En post-multipliant cette dernière équation par la matrice transposée des vecteurs propres:

$$[\phi][\phi]^T [\Delta][\phi][\phi]^T = [\phi][\lambda][\phi]^T \quad (4.41)$$

Comme $[\phi][\phi]^T = I$, et que $[\lambda]$ est une matrice diagonale:

$$[\Delta] = [\phi][\sqrt{\lambda}][\sqrt{\lambda}][\phi]^T \quad (4.42)$$

La racine carrée $[C]$ d'une matrice définie semi-positive peut donc se calculer de la façon suivante:

$$[C] = [\phi][\sqrt{\lambda}] \quad (4.43)$$

Cette méthode peut s'appliquer aux matrices définies positives ou strictement définies positives. Contrairement à la première méthode, cette deuxième façon d'extraire la racine carrée d'une matrice ne produit pas nécessairement une matrice triangulaire.

La dernière étape consiste à calculer les échantillons des contraintes de von Mises en générant autant de vecteurs Z (équation (4.33)) qu'il y a d'échantillons. Un générateur pseudo-aléatoire [23] est utilisé afin de calculer ces différents vecteurs. Ce générateur a été légèrement modifié

pour traiter les cas où la racine carrée de la matrice de covariances est calculée selon l'équation (4.43).

Une fois tous les échantillons calculés, la valeur efficace s'obtient en calculant d'abord la moyenne et la variance de la population, et par la suite en utilisant l'équation (2.37) :

$$V_{efficace} = \sqrt{\sigma^2 + \mu^2}$$

La valeur efficace de la contrainte de von Mises n'est pas réellement celle qui intéresse les ingénieurs. Celle associée à une probabilité quelconque est beaucoup plus intéressante afin d'évaluer les marges de sécurité. Celle-ci s'obtient en utilisant la relation suivante:

$$\text{Prob}_{\text{déf}} = \frac{N_{\text{déf}}}{N_{\text{tot}}} \quad (4.44)$$

où

$\text{Prob}_{\text{déf}}$	probabilité de défaillance
$N_{\text{déf}}$	nombre d'échantillons défectueux
N_{tot}	nombre total d'échantillons

En fixant la probabilité de défaillance à un niveau quelconque, et en connaissant le nombre total d'échantillons, il est possible de calculer le nombre d'échantillons défectueux. Ainsi, la contrainte recherchée est celle associée au $N_{\text{déf}}^{\text{ième}}$ échantillon ayant la valeur la plus élevée.

Nombre d'échantillons requis

Comme pour la plupart des méthodes statistiques, la précision obtenue est directement proportionnelle au nombre d'échantillons utilisés. Afin d'estimer le nombre d'échantillons requis pour chaque composante du tenseur des contraintes, il est possible d'utiliser la règle du pouce suivante [19]:

$$N = \begin{cases} 10000 & \text{pour } 0.01 \leq \text{Prob}_{\text{déf}} \leq 1 \\ 100000 & \text{pour } 0.001 \leq \text{Prob}_{\text{déf}} \leq 1 \\ 1000000 & \text{pour } 0.0001 \leq \text{Prob}_{\text{déf}} \leq 1 \end{cases}$$

Pour un degré de précision élevé, cette méthode peut devenir coûteuse au niveau du temps de calcul. Il pourrait être avantageux d'utiliser une approche plus performante, comme celle expliquée à la section suivante.

4.4.3 Méthode de Segalman

Pour les valeurs efficaces des variables linéaires calculées, comme celles des accélérations et des contraintes, la forme de leur fonction de densité de probabilité est exactement la même que celle de l'excitation, c'est-à-dire gaussienne et de moyenne nulle. Ainsi, seule la variance obtenue par l'intégration de la DSP de la réponse, permet de décrire complètement la fonction de densité de probabilité de la variable calculée. Comme la densité de probabilité de la contrainte de von Mises n'est pas gaussienne, ni de moyenne nulle, il est relativement difficile de déterminer la fonction de densité de probabilité lorsque celle-ci est requise. Contrairement à la méthode de Monte-Carlo, la méthode de Segalman aborde le problème d'un angle tout à fait différent. Une approche analytique est exploitée afin de déterminer les paramètres statistiques de la fonction de densité de probabilité.

Il a été démontré [24] que la valeur moyenne au carré de la contrainte de von Mises peut se calculer analytiquement en utilisant l'équation suivante:

$$(\sigma_{vm})_x^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left\{ \Psi_{yj}^\sigma \right\}^T [A] \left\{ \Psi_{yk}^\sigma \right\} \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} \int_0^\infty h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.45)$$

où

Ψ_{yj}^σ représente le tenseur de contraintes (six composantes) associé au mode j sur l'élément y .

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Il est important de mentionner que l'équation (4.45) n'effectue pas une superposition modale de la contrainte de von Mises, mais bien une superposition de chacune des composantes **linéaires** du tenseur de contraintes. Ces contraintes sont par la suite combinées par l'intermédiaire de la matrice A , obtenant ainsi l'expression de la contrainte de von Mises. En ce qui concerne le calcul de la fonction de densité de probabilité, la principale difficulté dans le calcul des paramètres statistiques réside dans l'interdépendance des variables qui la composent.

La méthode de calcul proposée par Segalman débute en exprimant la relation permettant d'obtenir le vecteur de contraintes à un endroit quelconque de la structure y , à une fréquence d'excitation bien précise. Cette relation n'est en fait que le principe de superposition modale, appliqué aux composantes linéaires du vecteur de contraintes:

$$\sigma(\omega, y) = \sum_{n \text{ modes}} q_n(\omega) \Psi_n^\sigma(y) \quad (4.46)$$

où

$\sigma(\omega, y)$ représente le vecteur de contraintes physiques de l'élément y

$q_n(\omega)$ représente la coordonnée modale associée au mode n

$\Psi_n^\sigma(y)$ représente le vecteur de contraintes de l'élément y associé au mode n

Ainsi, la contrainte de von Mises au carré peut être représentée de la façon suivante:

$$\sigma_{vm}^2(\omega, x) = \sigma(\omega, x)^T [A] \sigma(\omega, x) \quad (4.47)$$

La première étape permettant d'obtenir la distribution de densité de probabilité de la contrainte de von Mises consiste à calculer la matrice de covariances des coordonnées modales associée aux n modes retenus, pour une excitation selon une direction quelconque x :

$$[R_{qq}] = \begin{bmatrix} (q_1 q_1)_x & (q_1 q_2)_x & \cdots & (q_1 q_n)_x \\ (q_2 q_1)_x & (q_2 q_2)_x & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (q_n q_1)_x & \cdots & & (q_n q_n)_x \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où

$$(q_j q_k)_x = \int_0^\infty \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_j \ddot{x}_k}(\omega) d\omega \quad (4.49)$$

Les coordonnées modales ne sont effectivement pas indépendantes car les termes situés à l'extérieur de la diagonale de la matrice (4.48) ne sont pas nuls. Par contre, comme l'excitation

$S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)$ a une fonction de densité de probabilité gaussienne et une moyenne nulle, alors les coordonnées modales possèdent ces mêmes propriétés statistiques. En effectuant une décomposition par valeurs singulières [22] (méthode équivalente à une décomposition modale car la matrice est carrée, symétrique et définie semi-positive), la matrice de l'équation (4.48) peut s'écrire de la façon suivante:

$$[Rqq] = [\phi][X^2][\phi]^T \quad (4.50)$$

En effectuant les transformations suivantes:

$$\begin{aligned} [Rqq] &= [\phi][X][X][\phi]^T \\ [\phi]^T [Rqq][\phi] &= [\phi]^T [\phi][X][X][\phi]^T [\phi] \\ [X]^{-1} [\phi]^T [Rqq][\phi][X]^{-1} &= [I]_{nn} \\ [X]^{-1} [\phi]^T E \left[\{q(\omega)\} \{q(\omega)\}^T \right] [\phi][X]^{-1} &= [I]_{nn} \\ E \left[[X]^{-1} [\phi]^T \{q(\omega)\} \{q(\omega)\}^T [\phi][X]^{-1} \right] &= [I]_{nn} \\ E \left[\beta(\omega) \beta(\omega)^T \right] &= [I]_{nn} \end{aligned}$$

Ainsi, il est possible de définir:

$$\beta(\omega) = [X]^{-1} [\phi]^T \{q(\omega)\} \quad (4.51)$$

Cette première décomposition permet le passage dans un nouveau système de référence, défini par les coordonnées β qui sont indépendantes et qui possèdent une densité de probabilité gaussienne, une variance unitaire et une moyenne nulle.

En réécrivant l'équation (4.47) en utilisant ces nouvelles coordonnées définies à l'équation précédente:

$$\sigma_{vm}^2(\omega, x) = \{\beta(\omega)\}^T [C] \{\beta(\omega)\} \quad (4.52)$$

où

$$[C] = [X]^T [\phi]^T [B] [\phi] [X] \quad (4.53)$$

Chacun des termes de la matrice B de l'équation (4.53) s'obtient en utilisant l'équation suivante :

$$B_{MN} = [\Psi^\sigma(\nu)]_M^T [A] [\Psi^\sigma(\nu)]_N \quad (4.54)$$

Comme le terme MN de la matrice B se calcule à l'aide des vecteurs de contraintes associés aux modes M et N , cette matrice contient les *composantes croisées de la* contrainte de von Mises. En ce qui concerne la matrice C , il est avantageux de tirer profit du fait que cette matrice soit carrée, symétrique et définie semi-positive afin d'effectuer une seconde décomposition par valeurs singulières.

$$[C] = [R] [D^2] [R]^T \quad (4.55)$$

En insérant ce résultat dans l'équation (4.52):

$$\sigma_{vm}^2(\omega, x) = \{\beta(\omega)\}^T [R] [D^2] [R]^T \{\beta(\omega)\} \quad (4.56)$$

En effectuant un nouveau changement de variables:

$$\{Y(\omega)\} = [R]^T \{\beta(\omega)\} \quad (4.57)$$

Il est aussi possible de démontrer que les composantes de $Y(\omega)$ sont indépendantes, de variance unitaire, de moyenne nulle et de densité de probabilité gaussienne.

$$\begin{aligned} E[\beta(\omega)\beta(\omega)^T] &= [I] \\ E[[R]\{Y(\omega)\}\{Y(\omega)\}^T[R]^T] &= [I] \\ [R]E[\{Y(\omega)\}\{Y(\omega)\}^T][R]^T &= [I] \\ E[\{Y(\omega)\}\{Y(\omega)\}^T] &= [R]^T[I][R] \\ E[\{Y(\omega)\}\{Y(\omega)\}^T] &= [I] \end{aligned}$$

L'objectif de la seconde décomposition est de réduire le nombre total de variables indépendantes à un nombre maximum de cinq, soit le rang de la matrice C .

L'équation (4.56) peut donc être réécrite de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \sigma_{vm}^2(\omega, x) &= \{Y(\omega)\}^T [D^2] \{Y(\omega)\} \\ \sigma_{vm}^2(\omega, x) &= \sum_{i=1}^r D_i^2 Y^2(\omega)_i \end{aligned} \quad (4.58)$$

Finalement, en utilisant les équations de la statistique appliquées aux variables indépendantes, le calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises se simplifie à l'équation suivante:

$$(\sigma_{vm})_{efficace} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 D_i^2} \quad (4.59)$$

Le point suivant traite de la méthode utilisée afin de déterminer la valeur de contrainte de von Mises associée à une probabilité quelconque.

Calcul de la contrainte de von Mises associée à une probabilité donnée

Le calcul de la valeur de la contrainte efficace pour une probabilité donnée se calcule en utilisant un schéma itératif. L'indépendance entre chacune des n variables de l'équation (4.58) permet d'affirmer que:

$$\text{Probabilité totale} = \prod_{r=1}^n [prob(Y_{r,\max}) - prob(Y_{r,\min})] \quad (4.60)$$

où

$$Y_{r,\max} = \frac{\sigma_{vm}^{ref}}{D_r} \quad \text{et} \quad Y_{r,\min} = \frac{-\sigma_{vm}^{ref}}{D_r} \quad (4.61)$$

Il a été démontré précédemment que les fonctions de densité de probabilité des Y_r sont indépendantes, gaussiennes, possèdent un écart-type unitaire, une moyenne nulle et qu'elles sont au nombre maximum de cinq. En utilisant une routine [25] calculant l'aire sous la courbe normale standardisée bornée par les valeurs calculées en utilisant l'équation (4.61), on peut calculer la probabilité associée à une contrainte de von Mises quelconque. Il suffit de faire varier judicieusement la contrainte σ_{vm}^{ref} de cette équation jusqu'à ce que la probabilité demandée soit atteinte.

En résumé, la méthode de Segalman permet de réduire considérablement le nombre de variables aléatoires impliquées dans le calcul de la contrainte de von Mises à un nombre maximum de cinq, toutes indépendantes et possédant chacune une fonction de densité de probabilité gaussienne d'écart-type unitaire.

4.4.4 Calcul des marges de sécurité

Une façon rapide et efficace de vérifier et de quantifier la résistance d'une structure à son chargement consiste à calculer les marges de sécurité :

$$\%MS = \left(\frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{VM} \times FS} - 1 \right) \times 100 \quad (4.62)$$

où

$\%MS$	est la valeur de la marge de sécurité exprimée en pourcentage
σ_{adm}	représente la contrainte admissible
σ_{VM}	est la contrainte de von Mises
FS	le facteur de sécurité

Une marge de sécurité positive signifie que l'élément résistera à son chargement, alors qu'une valeur négative de cette quantité se traduit par une rupture probable de celui-ci.

4.5 Méthode de Segalman appliquée au calcul des valeurs efficaces des variables linéaires

La méthode de Segalman, développée au point 4.4.3, permettant de calculer la valeur efficace de la contrainte de von Mises peut être modifiée afin de calculer les valeurs efficaces de l'ensemble des variables linéaires. L'équation (4.47) appliquée à une variable linéaire quelconque s'exprime ainsi :

$$v^2(\omega, x) = v(\omega, x)v(\omega, x) \quad (4.63)$$

L'équation (4.63) peut s'appliquer à l'ensembles des variables linéaires, c'est-à-dire toutes celles énoncées au point 3.2 de ce mémoire, à l'exception du calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises.

L'équation (4.54) associée au calcul de la matrice B, lorsqu'elle est appliquée à l'ensemble des variables linéaires s'écrit de la façon suivante :

$$B_{MN} = v(y)_M v(y)_N \quad (4.64)$$

où

$v(y)_M$ représente la variable linéaire d'intérêt associée au mode M .

Cette façon de calculer la matrice B est la seule variation de cette nouvelle méthode comparée à la méthode originale proposée par Segalman utilisée pour le calcul de la contrainte de von Mises. Cependant, certaines modifications supplémentaires doivent être effectuées afin d'être en mesure de calculer les valeurs efficaces de vitesse et d'accélération et de prendre en compte la contribution associée aux modes rigides et celle reliée à la flexibilité résiduelle.

4.5.1 Calcul des valeurs efficaces de la vitesse et de l'accélération

Contrairement à l'ensemble des autres variables, la méthode de superposition modale utilisée pour le calcul de la valeur efficace de la vitesse et de l'accélération ne s'effectue pas avec les vecteurs propres qui leur sont associés mais plutôt avec les vecteurs propres de déplacement. Les valeurs efficaces de vitesses et d'accélération sont obtenues en intégrant la densité spectrale de puissance du déplacement multipliée par la fréquence d'excitation élevée à la puissance deux et quatre respectivement.

Ceci entraîne une modification dans le calcul de la matrice de covariances des coordonnées modales (équation (4.48)). Pour une direction d'excitation donnée, chacun des termes $(q_j q_k)$ de cette matrice se calcule ainsi pour la vitesse :

$$(q_j q_k)_x = \int_0^{\infty} \omega^2 \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.65)$$

et de cette façon pour l'accélération :

$$(q_j q_k)_x = \int_0^{\infty} \omega^4 \Gamma_{jx} \Gamma_{kx} h_j^*(\omega) h_k(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.66)$$

Afin d'obtenir les valeurs absolues de déplacement de vitesse ou d'accélération, il est impératif d'ajouter les modes de corps rigides dans la superposition modale. La façon de procéder pour effectuer cet ajout fait l'objet du point suivant.

4.5.2 Ajout de la contribution associée aux modes de corps rigides

L'ajout des modes de corps rigides s'effectue en ajoutant, lors du calcul de la matrice de covariances des coordonnées modales (équation (4.48)), trois *coordonnées modales* additionnelles associées à chacun des trois modes de corps rigides calculés par le DMAP. Comme les modes de corps rigides ont une fréquence naturelle nulle, chacune de ces trois coordonnées associées aux modes rigides s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q_{r_x} &= \frac{-A}{\omega^2} \\ q_{r_y} &= \frac{-B}{\omega^2} \\ q_{r_z} &= \frac{-C}{\omega^2} \end{aligned} \quad (4.67)$$

où chacune des valeurs A, B et C représentent les trois composantes X, Y et Z du vecteur unitaire définissant la direction d'excitation.

À titre d'exemple, pour le calcul des déplacements, le terme de la matrice de covariances faisant intervenir une coordonnée modale associée à un mode dynamique et une seconde reliée au premier mode rigide s'écrit de la façon suivante :

$$(q_j q_r)_x = \int_0^{\infty} \frac{-\Gamma_{jx} h_f^*(\omega) A S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega}{\omega^2} \quad (4.68)$$

En ce qui concerne l'ajout de cette contribution pour la vitesse et l'accélération, le principe illustré aux équations (4.65) et (4.66) s'applique. Le point suivant traite de l'ajout de la contribution associée à la flexibilité résiduelle lorsque la présente méthode est employée.

4.5.3 Ajout de la contribution associée à la flexibilité résiduelle

L'ajout de la contribution associée à la flexibilité résiduelle s'effectue d'une façon similaire à celle utilisée pour inclure l'effet des modes de corps rigides. Cette contribution est ajoutée en la considérant comme n'importe quel autre mode de la structure, soit la combinaison d'un vecteur propre et d'une coordonnée modale. Le DMAP calcule cette contribution pour une excitation unitaire selon les trois axes de translation du système de coordonnées de base de MSC/NASTRAN. Pour l'implantation, chacune des trois composantes de flexibilité résiduelle est considérée comme un mode supplémentaire de la structure.

Comme la flexibilité résiduelle n'est pas fonction de la fréquence d'excitation, l'équivalent de la coordonnée modale qui lui est associée n'est pas davantage fonction de la fréquence. Chacune des trois coordonnées modales équivalentes s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
q_{fr_1} &= A \\
q_{fr_y} &= B \\
q_{fr_z} &= C
\end{aligned}
\tag{4.69}$$

où A , B et C représentent ici aussi les trois composantes X , Y et Z du vecteur unitaire d'excitation. En résumé, comme il est possible de considérer les modes de corps rigides et la contribution associée à la flexibilité résiduelle de la même façon que celle utilisée pour traiter les modes élastiques, le problème peut se résumer à l'équation suivante :

$$V = \begin{bmatrix} \phi_{r_1} & \phi_{r_2} & \phi_{r_3} & \phi_{d_1} & \cdots & \phi_{d_n} & \phi_{fr_1} & \phi_{fr_2} & \phi_{fr_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{r_1} \\ q_{r_2} \\ q_{r_3} \\ q_{d_1} \\ \vdots \\ q_{d_n} \\ q_{fr_1} \\ q_{fr_2} \\ q_{fr_3} \end{Bmatrix} \tag{4.70}$$

où l'indice r réfère à un mode rigide, d à un mode dynamique et finalement l'indice fr à la flexibilité résiduelle.

4.5.4 Avantages et désavantages de la méthode

Cette méthode possède comme principal avantage de réduire de façon très importante le nombre d'intégrations nécessaires. En effet, seul le calcul de la matrice de covariances des coordonnées modales nécessite d'effectuer des intégrations. Une fois cette matrice calculée et décomposée, l'obtention de chacune des valeurs suivantes se limite à quelques produits de matrices et de vecteurs nécessaires pour obtenir la matrice C , et à la décomposition par valeurs singulières de cette dernière matrice. Le nombre d'intégrations qui doit être effectué est fonction du nombre de

modes retenus. Comme cette matrice de covariances est symétrique, le nombre d'intégrations nécessaires est le suivant :

$$\text{nombre d'intégrations} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (4.71)$$

où n est le nombre de modes retenus.

Cependant, cette méthode ne démontre un intérêt que dans le cas où l'utilisateur demande le calcul d'une quantité importante de valeurs par rapport au nombre de modes retenus. Par exemple, si l'utilisateur conserve 30 modes, le calcul de la matrice de covariances nécessitera l'intégration de 465 fonctions. Si pour ce cas l'analyse effectuée par l'usager demande l'intégration d'un nombre inférieur de fonctions, comme le calcul de 400 valeurs efficaces de contraintes, alors cette présente méthode est désavantageuse par rapport à la méthode d'intégration numérique par exemple. Finalement, deux matrices de covariances supplémentaires doivent être calculées si l'analyse requiert les valeurs efficaces de la vitesse et de l'accélération.

Le point suivant discute d'une dernière méthode qui combine toutes celles étudiées jusqu'à maintenant.

4.6 Méthode d'intégration numérique améliorée

L'efficacité de la méthode de calcul présentée au point 4.5 peut être facilement améliorée en prenant avantage de la stratégie utilisée par la méthode d'intégration analytique. Cette dernière méthode transforme l'intégrale d'une somme en une somme d'intégrales. Comme ce fut démontré à plusieurs reprises, la valeur efficace d'une variable linéaire se calcule de la façon suivante :

$$\text{valeur efficace} = \int_0^{\infty} H_x^*(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) H_x(\omega) d\omega \quad (4.72)$$

où

$H_x^*(\omega)$ est le complexe-conjugué de la fonction de transfert physique $H_x(\omega)$ dans la direction d'excitation x .

$S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega)$ représente la densité spectrale de puissance de l'excitation.

En utilisant le principe de superposition modale pour le calcul des fonctions de transfert physiques, cette dernière équation peut se récrire ainsi :

$$\text{valeur efficace} = \int_0^\infty \left[q_1^*(\omega) \Psi_1 + \dots + q_n^*(\omega) \Psi_n \right] S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) \left[q_1(\omega) \Psi_1 + \dots + q_n(\omega) \Psi_n \right] d\omega \quad (4.73)$$

où

q_n^* est le complexe-conjugué de la coordonnée modale q_n associée au mode n

Ψ_n est la composante du vecteur propre associée au mode n

En effectuant le produit de l'équation (4.73), cette dernière se représente de la façon suivante :

$$\text{valeur efficace} = \int_0^\infty \left[q_1^*(\omega) \Psi_1 q_1(\omega) \Psi_1 + \dots + q_n^*(\omega) \Psi_n q_n(\omega) \Psi_n \right] S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \quad (4.74)$$

En distribuant la densité spectrale de puissance de l'excitation, et en transformant le problème en une somme d'intégrales :

$$\begin{aligned} \text{valeur efficace} = & \Psi_1 \Psi_1 \int_0^\infty q_1^*(\omega) q_1(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega + \Psi_1 \Psi_2 \int_0^\infty q_1^*(\omega) q_2(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \\ & + \dots + \Psi_n \Psi_n \int_0^\infty q_n^*(\omega) q_n(\omega) S_{\ddot{x}_f \ddot{x}_f}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (4.75)$$

Les termes situés devant chacune des intégrales, c'est-à-dire le produit des composantes des vecteurs propres $\Psi_m \Psi_n$, sont calculés par la matrice B définie à l'équation (4.64). Les intégrales de l'équation (4.75) sont obtenues lors du calcul de la matrice de covariances des coordonnées modales représentées par l'équation (4.48). Il est donc possible de calculer la valeur efficace d'une variable en employant ces deux matrices. En prenant avantage de la symétrie de ces dernières matrices, la valeur efficace d'une variable se calcule ainsi :

$$\text{valeur efficace} = \sum_{i=1}^x R_{qq}(i,i) B(i,i) + 2 \sum_{i=1}^x \sum_{j=i+1}^x R_{qq}(i,j) B(i,j) \quad (4.76)$$

Les intégrales de la matrice R_{qq} peuvent être effectuées en utilisant la méthode d'intégration analytique ou la méthode d'intégration numérique. Cependant, dans le cadre de ce projet, seule la méthode d'intégration numérique est employée pour calculer ces intégrales. Pour le calcul des valeurs efficaces de vitesse et d'accélération, et pour prendre en compte l'effet de la flexibilité résiduelle ou celui des modes rigides géométriques, il suffit d'utiliser les principes démontrés aux points 4.5.1 à 4.5.3.

4.6.1 Avantages de la méthode

Cette méthode, comparée aux autres énoncées jusqu'à maintenant aux sections 4.3.1, 4.3.2 et 4.5, présente plusieurs avantages :

1. Aucune décomposition par valeurs singulières n'est nécessaire.
2. La matrice C (équation (4.53)) n'a plus besoin d'être évaluée.
3. Les intégrations nécessaires se limitent à celles qui doivent être effectuées pour le calcul de la matrice R_{qq} .

Le point suivant aborde les différentes façons qui peuvent être utilisées pour visualiser les résultats générés.

4.7 Visualisation des résultats

Comme un des objectifs de ce projet est de faciliter l'analyse des structures soumises à un chargement aléatoire à sa base, il est primordial de générer des fichiers résultats qui faciliteront l'atteinte de cet objectif. Les résultats peuvent donc être analysés de diverses manières selon leur type.

4.7.1 Valeurs efficaces ou associées à une probabilité

Les valeurs efficaces, autant que celles associées à une probabilité spécifiée par l'utilisateur, peuvent être analysées de deux façons différentes:

- par l'intermédiaire d'un fichier ASCII
- par l'intermédiaire d'I-DEAS

Afin de ne pas créer un gigantesque fichier contenant l'ensemble des résultats, plusieurs fichiers ASCII, un pour chacun des types de résultats demandés, sont créés. Chaque fichier contient l'ensemble des résultats demandés par l'utilisateur pour ce type de résultat, ainsi qu'un sommaire des valeurs extrêmes calculées. Les résultats sont disposés de manière à ce qu'aucune ambiguïté ne puisse exister sur leur signification (figure 4.4).

SUMMARY OF MAXIMUM PEAK RESPONSE

Element ID		Type	Group	SX	SY	SZ	SKY	SYZ	SZK
comp.	NASTRAN Unique								
SX	11 11	CPENTA	0	1.07820E+09	1.14398E+08	2.96537E+07	1.87168E+08	7.05774E+07	1.44513E+07
SY	2 2	CHEXA	0	1.08519E+07	2.01860E+08	1.08546E+07	7.58085E+07	1.32692E+07	6.66555E+01
SZ	18 18	CPENTA	0	2.00553E+08	2.73901E+07	5.30796E+07	7.22323E+07	3.04736E+05	2.08833E+07
SKY	10 10	CHEXA	0	1.89136E+08	5.53105E+07	5.04120E+07	8.07727E+08	8.28008E+06	2.06219E+07
SZK	18 18	CPENTA	0	2.00553E+08	2.73901E+07	5.30796E+07	7.22323E+07	3.04736E+05	2.08833E+07
SYZ	12 12	CPENTA	0	9.88650E+08	4.29199E+07	3.76098E+07	1.54713E+08	8.38942E+07	1.67783E+07

PEAK ELEMENT STRESSES

Element ID											
NASTRAN	Unique	Type	Group	SX	SY	SZ	SKY	SYZ	SZK		
1	1	CHEKA	0	3.49237E+07	1.09571E+07	3.49248E+07	7.59901E+07	1.32792E+07	4.88867E-01		
2	2	CHEKA	0	1.08519E+07	2.01860E+08	1.08546E+07	7.58085E+07	1.32692E+07	6.66555E+01		
3	3	CHEKA	0	3.27053E+06	1.70129E+08	3.27284E+06	7.52889E+07	1.32413E+07	2.27773E+02		
4	4	CHEKA	0	9.92867E+05	1.75437E+08	9.62970E+05	7.42730E+07	1.31879E+07	7.89302E+02		
5	5	CHEKA	0	6.66669E+05	1.74532E+08	3.68241E+05	7.26130E+07	1.31028E+07	2.59195E+03		
6	6	CHEKA	0	2.08740E+06	1.74973E+08	1.29964E+05	7.01694E+07	1.29805E+07	1.06240E+04		
7	7	CHEKA	0	9.40788E+06	1.72648E+08	1.41985E+06	6.68111E+07	1.28168E+07	1.37781E+04		
8	8	CHEKA	0	4.15593E+07	1.86304E+08	1.37200E+07	6.24148E+07	1.26085E+07	4.26461E+05		
9	9	CHEKA	0	1.76053E+08	8.05543E+07	3.02950E+07	5.88487E+07	1.23971E+07	4.15877E+06		
10	10	CHEKA	0	1.89136E+08	5.53105E+07	5.04120E+07	8.07727E+08	8.28008E+06	2.06219E+07		
11	11	CPENTA	0	1.07820E+09	1.14398E+08	2.96537E+07	1.87168E+08	7.05774E+07	1.44513E+07		
12	12	CPENTA	0	9.88650E+08	4.29199E+07	3.76098E+07	1.54713E+08	8.38942E+07	1.67783E+07		
13	13	CPENTA	0	7.47818E+08	8.65072E+06	3.05537E+06	1.62008E+08	2.53961E+07	1.44217E+07		
14	14	CPENTA	0	6.93878E+08	1.33871E+06	7.60183E+06	1.39230E+08	2.22390E+07	1.91722E+07		
15	15	CPENTA	0	4.52895E+08	2.69852E+06	5.71152E+06	1.30903E+08	3.18123E+06	1.39295E+07		
16	16	CPENTA	0	4.12022E+08	4.51107E+06	8.77999E+06	1.08626E+08	1.03823E+06	1.85187E+07		
17	17	CPENTA	0	2.29297E+08	4.85305E+07	4.39451E+07	8.42846E+07	7.90220E+06	1.00104E+07		
18	18	CPENTA	0	2.00553E+08	2.73901E+07	5.30796E+07	7.22323E+07	3.04736E+05	2.08833E+07		
20	20	CTETRA	0	1.64540E+06	5.59547E+06	2.00818E+05	1.81876E+06	1.53755E+06	1.03745E+06		
21	21	CTETRA	0	2.49149E+06	2.17878E+06	7.98934E+05	1.78113E+06	1.85969E+06	1.04048E+06		
22	22	CTETRA	0	5.02584E+06	4.08298E+05	8.28636E+05	1.73416E+06	2.71279E+05	8.76721E+05		
23	23	CTETRA	0	4.48639E+06	7.80587E+05	8.19873E+05	1.15928E+05	6.76248E+05	1.44159E+06		

Figure 4.4 Exemple type d'une partie d'un fichier ASCII généré par l'algorithme

Les résultats peuvent aussi être visualisés en utilisant le logiciel I-DEAS et il lui sont transmis par un fichier *universal* généré par l'algorithme. Il est important de mentionner que seuls les résultats nodaux peuvent être exportés vers I-DEAS. En ce qui concerne les résultats associés aux éléments, la définition du système de coordonnées élémentaires diffère entre MSC/NASTRAN et I-DEAS. Il est alors nécessaire de transformer ces résultats dans un système de coordonnées pouvant être correctement interprété par I-DEAS. Comme cette transformation sort du cadre de ce projet, l'exportation des résultats élémentaires vers I-DEAS n'a pas été effectuée.

Il est important de mentionner que seuls les résultats générés par l'algorithme sont écrits à l'intérieur du fichier *universal*. Si l'utilisateur désire utiliser I-DEAS afin de vérifier les résultats obtenus, il doit lui-même trouver une solution pour transmettre à ce logiciel les informations décrivant les composantes du modèle d'éléments finis (comme les nœuds et les éléments).

4.7.2 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse

Il peut être utile de visualiser les graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse. Ces graphiques peuvent contenir plusieurs informations très pertinentes lors de l'analyse structurale. Entre autre, ils peuvent indiquer quels sont les endroits de la bande de fréquences qui contribuent davantage à la valeur efficace. Afin de simplifier la visualisation de ces graphiques, un outil HTML a été développé afin de permettre un accès facile et rapide aux graphiques.

Après avoir préalablement sélectionné les éléments ou les nœuds pour lesquels il désire obtenir un graphique de la DSP de la réponse, l'utilisateur doit fournir à l'algorithme quelques paramètres, soient l'intervalle de fréquences et la résolution fréquentielle. Ces paramètres peuvent se spécifier de trois façons différentes :

1. En spécifiant une fréquence de départ, un incrément fréquentiel et le nombre d'incréments qui doivent être utilisés (équivalent à la carte **FREQ1** de MSC/NASTRAN).
2. En spécifiant une bande de fréquences ainsi que le nombre d'intervalles logarithmiques situés à l'intérieur de celle-ci (équivalent à la carte **FREQ2** de MSC/NASTRAN).
3. En spécifiant le nombre de points pour chacun des intervalles bornés par les fréquences naturelles de la structure et par un paramètre régissant la distribution de ces points dans chacun des intervalles. L'interpolation effectuée à l'intérieur de ceux-ci peut être linéaire ou logarithmique (équivalent à la carte **FREQ3** de MSC/NASTRAN) [13]

Les graphiques sont créés par le logiciel *GNU PLOT* [26], sous un format *.png*. L'algorithme crée un fichier HTML permettant d'accéder facilement et rapidement aux différents graphiques (figure 4.5).

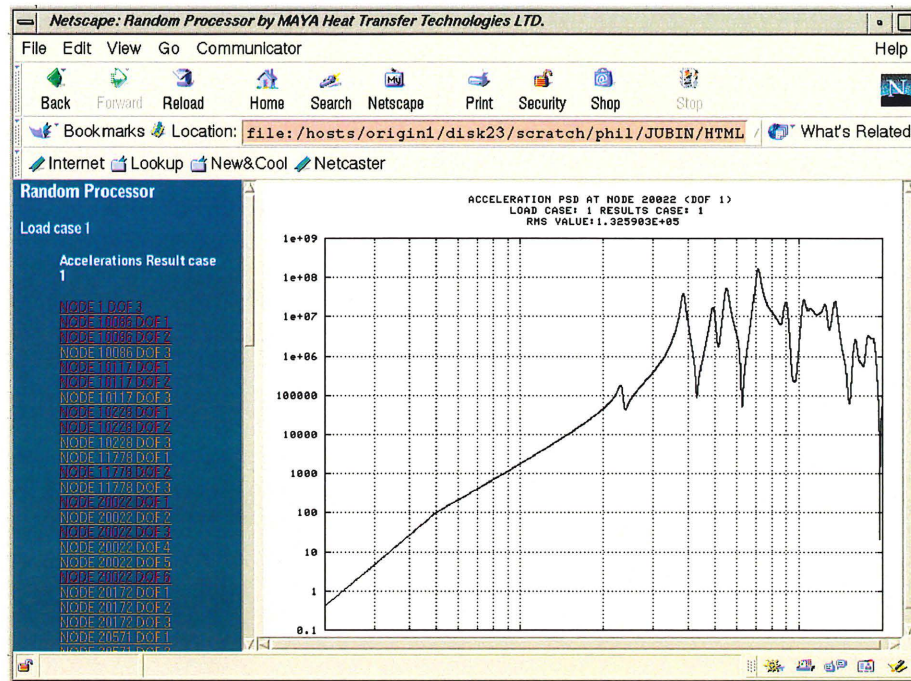


Figure 4.5 Exemple type d'une page HTML créée par l'algorithme

4.8 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif de présenter les méthodes qui sont employées dans le cadre de ce projet de recherche. En résumé, voici les principaux points de ce chapitre :

- La valeur efficace des résultats peut s'obtenir en utilisant un algorithme d'intégration numérique de Gauss-Kronrod, un algorithme numérique amélioré ou un algorithme analytique qui développe la fonction à intégrer en une somme de fractions partielles. Dans cette dernière méthode d'intégration, chacun des segments de la DSP de l'excitation est modélisé à l'aide d'un polynôme dont les coefficients sont déterminés par la méthode des moindres carrés.
- Le calcul de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire peut s'effectuer de deux façons. La première méthode de type Monte-Carlo génère un nombre élevé

d'échantillons duquel est extraite la fonction de densité de probabilité de la contrainte. La seconde, celle de Segalman, utilise une technique qui permet de réduire la taille du problème à un nombre maximal de cinq variables indépendantes à partir desquelles les valeurs efficaces et celles associées à une probabilité donnée peuvent être calculées.

- La théorie de Segalman utilisée pour le calcul de la valeur efficace de la contrainte de von Mises peut être modifiée afin de calculer les valeurs efficaces de l'ensemble des variables linéaires. Cette méthode permet aussi de prendre en compte l'effet des modes de corps rigides, ainsi que la contribution associée à la flexibilité résiduelle. Cette méthode étant de toute évidence moins efficace que la méthode d'intégration numérique améliorée, elle n'est pas implantée dans la version finale de l'algorithme.
- Il est possible de combiner les méthodes d'intégration numérique, analytique et de Segalman afin d'obtenir la méthode d'intégration numérique améliorée. Cette façon de faire réduit, de façon générale, le nombre d'intégrations numériques nécessaires lors d'une analyse, et augmente la rapidité de calcul.

L'étape suivante consiste à valider l'algorithme développé. Le chapitre suivant analyse les performances et les résultats générés par l'algorithme.

Chapitre 5

Résultats

5.1 Introduction

De façon générale, on apprécie un algorithme numérique par l'exactitude des résultats qu'il génère. La rapidité de calcul, la facilité d'utilisation et la robustesse sont aussi des attributs importants d'un algorithme et de son implantation informatique. Ce chapitre aborde la validation des résultats calculés par l'algorithme développé dans le cadre de ce projet, ainsi que sa rapidité de calcul. Cette étape est importante car elle permet en premier lieu de vérifier si les objectifs fixés au départ ont été rencontrés, et deuxièmement d'établir une certaine confiance en l'algorithme. Même si toutes les précautions ont été prises lors de la conception et de l'écriture du code, il est toujours possible qu'une erreur puisse s'être glissée par inadvertance. Un simple signe de soustraction au lieu d'un signe d'addition peut engendrer un écart énorme entre la valeur calculée et la valeur véritable.

Ce chapitre débute par la description de la méthode utilisée afin de valider les résultats générés par l'algorithme et se poursuit par une comparaison entre les résultats obtenus et ceux utilisés comme référence.

5.2 Méthodologie

Une façon efficace de valider les résultats calculés par un algorithme consiste à les comparer à ceux générés par l'utilisation d'une méthode fiable qui a fait ses preuves. Ces résultats de référence peuvent provenir de plusieurs sources différentes. Parmi celles-ci, se retrouvent l'utilisation d'un calcul analytique simple, un ouvrage de référence quelconque, ou encore un code d'éléments finis commercial qui, pour le cas étudié par ce projet, permet d'effectuer des analyses aléatoires.

Il a donc été décidé d'utiliser le logiciel MSC/NASTRAN version 70.7 afin d'effectuer la validation des résultats générés par l'algorithme. Il ne faut pas voir un paradoxe dans le fait que MSC/NASTRAN soit utilisé comme logiciel de référence alors que ce projet de maîtrise a comme objectif de trouver une alternative à celui-ci. Le problème relié à l'utilisation de MSC/NASTRAN dans le cadre de l'analyse aléatoire de structures ne provient pas de l'imprécision de ses résultats mais plutôt de sa difficulté d'utilisation et de sa lenteur de calcul.

Il y a plusieurs avantages à utiliser ce code d'éléments finis comme outil de référence. Ce dernier étant très reconnu pour l'analyse des structures aérospatiales, un algorithme qui générerait des résultats différents de celui-ci ne serait probablement pas accepté par les ingénieurs œuvrant dans ce domaine. Il permet d'utiliser des cas complexes comme modèles de référence, ce qui serait pratiquement impossible de faire dans le cas de l'utilisation d'un calcul analytique simple. Finalement, comme l'analyse modale est effectuée par MSC/NASTRAN autant pour la méthode de référence que pour la méthode développée, les modes propres et les fréquences naturelles utilisés pour le calcul sont rigoureusement les mêmes dans les deux cas.

5.2.1 Modèle utilisé pour la validation des résultats

Un modèle d'éléments finis a été conçu afin de valider les résultats calculés par l'algorithme. Ce dernier, illustré à la figure 5.1, contient 282 noeuds et 128 éléments. Il regroupe tous les types d'éléments qui doivent être considérés par le projet (tableau 3.1).

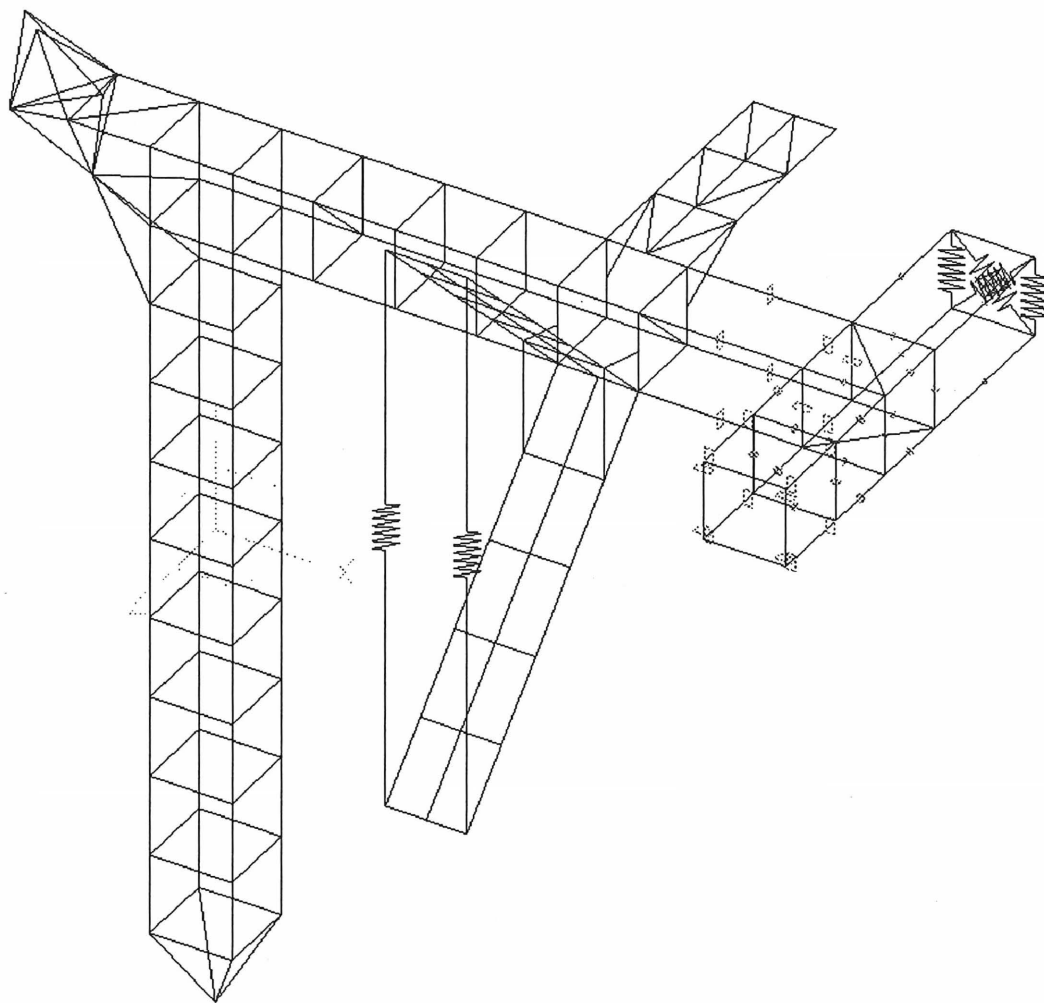


Figure 5.1 Modèle utilisé pour la validation de l'algorithme

Les résultats s'obtiennent de trois façons différentes en utilisant soit la méthode d'intégration numérique, la méthode d'intégration numérique améliorée ou la méthode d'intégration analytique. Ces trois méthodes permettent de prendre en compte la contribution associée à la flexibilité résiduelle. La validation des résultats portera sur les cas suivants :

- méthode d'intégration numérique (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable);
- méthode d'intégration analytique (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable);

- méthode d'intégration numérique améliorée (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable);
- méthode d'intégration numérique avec flexibilité résiduelle (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable);
- méthode d'intégration analytique avec flexibilité résiduelle (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable);
- méthode d'intégration numérique améliorée avec flexibilité résiduelle (amplitude de la DSP de l'excitation constante et variable).

Comme le calcul de la contrainte de von Mises utilise une méthode totalement différente, la validation de celle-ci s'effectuera ultérieurement de façon distincte.

Habituellement, une plus grande confiance sera accordée à la méthode de validation si les paramètres définissant l'analyse sont complexes. Pour cette raison, ceux-ci n'ont pas été choisis en fonction de leur ressemblance à ceux utilisés habituellement dans les analyses aléatoires effectuées en industrie. Ils ont plutôt été choisis dans l'objectif de soumettre à l'algorithme un cas *difficile* à traiter. Les points suivants décrivent les différents paramètres utilisés pour valider le calcul des valeurs efficaces.

Validation des résultats sans la contribution de la flexibilité résiduelle

Les deux types de densité spectrale de puissance de l'excitation utilisés permettent de valider le code lorsqu'il est soumis à deux cas extrêmes. La forme de la DSP d'amplitude variable permet de valider l'interpolation effectuée par la méthode d'intégration numérique afin de déterminer la valeur de la DSP à une fréquence spécifique. Il teste la performance de l'algorithme d'intégration analytique lorsque la DSP est de forme quelconque. Les densités spectrales d'excitation utilisées sont illustrées aux figures suivantes.

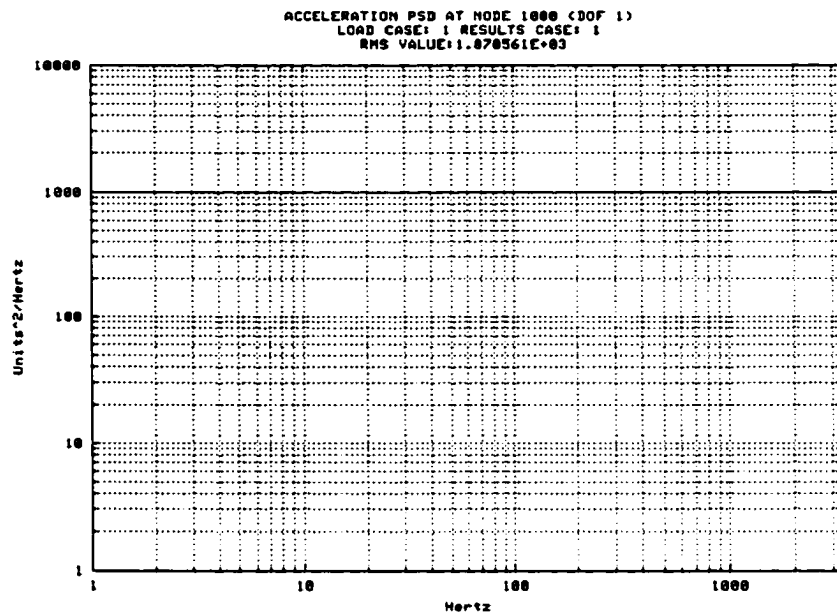


Figure 5.2 Densité spectrale de puissance de l'excitation : amplitude constante

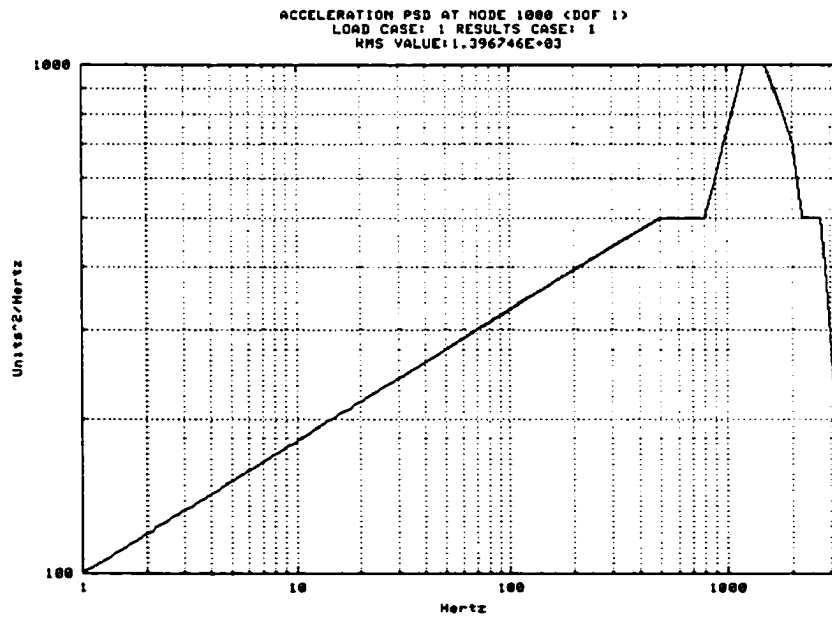


Figure 5.3 Densité spectrale de puissance de l'excitation : amplitude variable

Les valeurs utilisées pour la forme d'amplitude variable de l'excitation sont décrites au tableau 5.1.

TABLEAU 5.1 DENSITÉ SPECTRALE DE L'EXCITATION POUR LE CAS SANS FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE

Segment	Fréquence 1 (Hz)	DSP 1 (unité ² /Hz)	Fréquence 2 (Hz)	DSP 2 (unité ² /Hz)	Pente (dB/oct.)
1	1.00	100.00	500.00	500.00	0.78
2	500.00	500.00	800.00	500.00	0.00
3	800.00	500.00	1200.00	1000.00	5.13
4	1200.00	1000.00	1500.00	1000.00	0.00
5	1500.00	1000.00	2000.00	700.00	-3.72
6	2000.00	700.00	2200.00	500.00	-10.59
7	2200.00	500.00	2700.00	500.00	0.00
8	2700.00	500.00	3200.00	200.00	-16.18
9	3200.00	200.00	3500.00	200.00	0.00

Pour l'ensemble des analyses qui seront effectuées, l'amplification modale utilisée est la suivante:

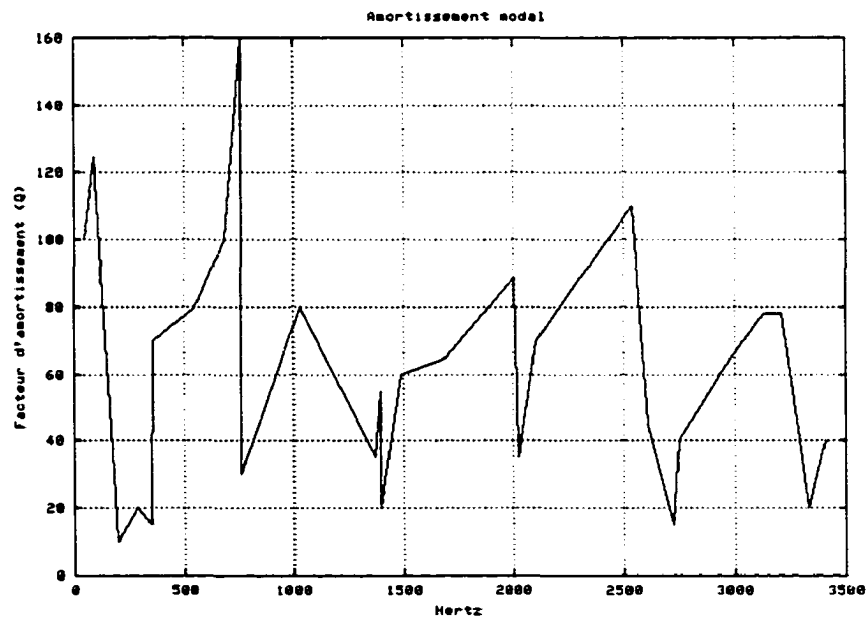


Figure 5.4 Amplification modale utilisée pour fin de validation

Les valeurs élevées du facteur d'amplification créeront des points d'inflexion dans la densité spectrale de puissance de la réponse. Ceux-ci permettront de vraiment valider les calculs effectués par les différentes méthodes d'intégration employées pour ce type de fonction. Les valeurs des facteurs d'amplification et des fréquences naturelles sont fournies au tableau 5.2.

TABLEAU 5.2 TABLE DES FACTEURS D'AMPLIFICATION MODALE

Fréquence naturelle (Hz)	Amplification (Q)	Fréquence naturelle (Hz)	Amplification (Q)	Fréquence naturelle (Hz)	Amplification (Q)
49.89	100.00	759.80	30.00	2537.14	110.00
90.67	125.00	1030.83	80.00	2610.50	45.00
124.39	90.00	1374.14	35.00	2728.11	15.00
198.39	10.00	1394.14	55.00	2748.24	40.00
287.43	20.00	1394.17	20.00	2986.27	65.00
353.83	15.00	1488.41	60.00	3132.51	78.00
355.60	70.00	1693.02	65.00	3211.08	78.00
546.82	80.00	2004.65	89.00	3332.42	20.00
686.03	100.00	2026.10	35.00	3406.30	40.00
756.17	160.00	2102.10	70.00		

Les autres paramètres pertinents à l'analyse sont:

- Bande de fréquences d'intégration: 1 à 3500 Hz
- Modes élastiques retenus: les 30 premiers modes
- Direction d'excitation⁶: X

Validation des résultats avec la flexibilité résiduelle

Une forme différente de densité spectrale de puissance a été utilisée afin de valider les résultats lorsque la contribution associée à la flexibilité résiduelle est considérée. Dans ce cas, la bande d'intérêt se termine à 100 Hz, et seuls les cinq premiers modes élastiques ont été retenus afin

⁶ Exprimée selon le système de coordonnées de base de MSC/NASTRAN.

que la contribution associée à la flexibilité résiduelle soit plus significative. Les DSP des excitations utilisées pour cette validation sont illustrées aux figures 5.5 et 5.6.

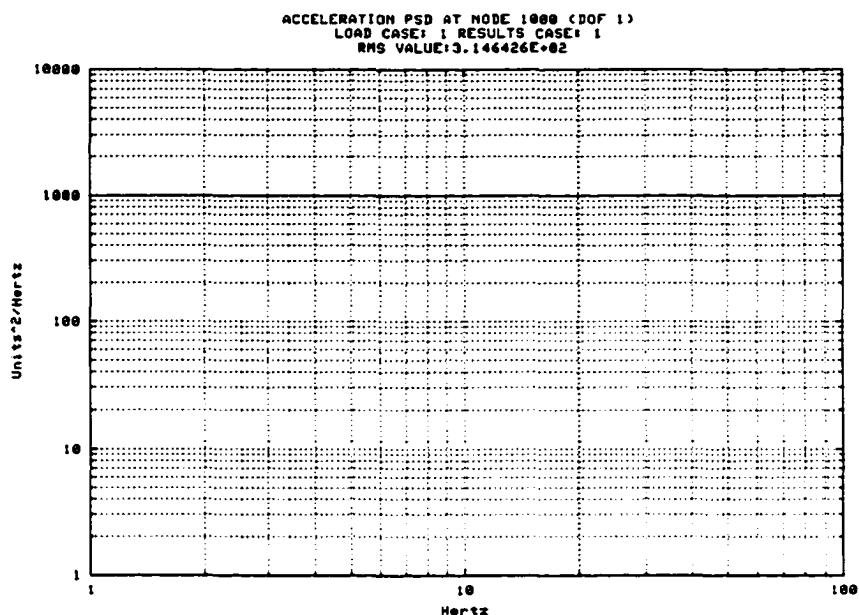


Figure 5.5 Densité spectrale de puissance de l'excitation utilisée lorsque la flexibilité résiduelle est retenue : amplitude constante.

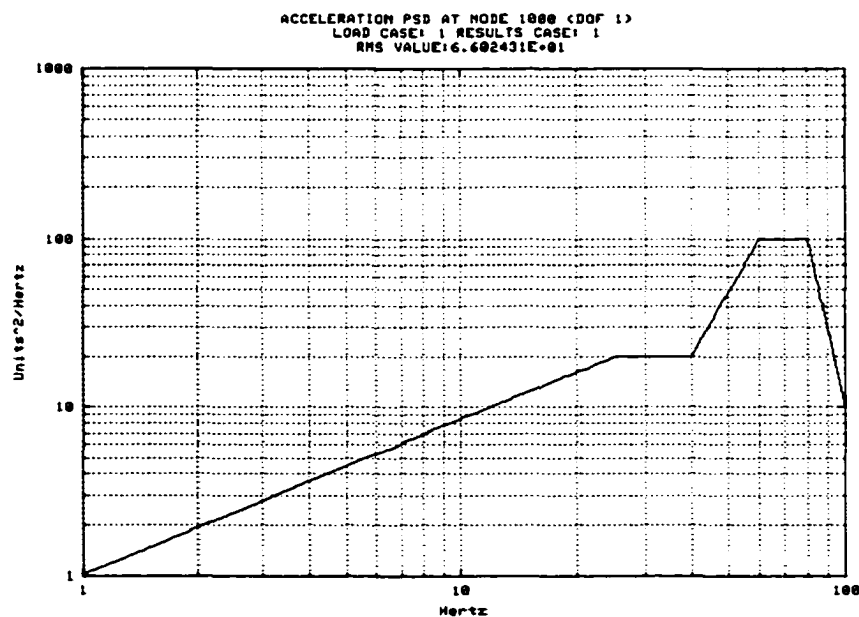


Figure 5.6 Densité de puissance de l'excitation utilisée lorsque la flexibilité résiduelle est retenue : amplitude variable.

Les segments de la DSP d'amplitude variable utilisée pour la validation de la méthode lorsque la flexibilité résiduelle est ajoutée sont définis au tableau 5.3.

TABLEAU 5.3 DENSITÉ SPECTRALE DE L'EXCITATION POUR LE CAS AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE

Segment	Fréquence 1 (Hz)	DSP 1 ($\text{unité}^2/\text{Hz}$)	Fréquence 2 (Hz)	DSP 2 ($\text{unité}^2/\text{Hz}$)	Pente (dB/oct.)
1	1.00	1.00	25.00	20.00	3.00
2	25.00	20.00	40.00	20.00	0.00
3	40.00	20.00	60.00	100.00	11.91
4	60.00	100.00	80.00	100.00	0.00
5	80.00	100.00	100.00	10.00	-30.96

Les autres paramètres pertinents pour la validation des calculs effectués en tenant compte de la contribution associée à la flexibilité résiduelle sont:

- Bande de fréquences d'intégration: 1 à 100 Hz
- Modes élastiques retenus: les 5 premiers modes
- Direction d'excitation: X

Les valeurs des facteurs d'amplification modale utilisées dans ce cas sont exactement les mêmes que celles énumérées au tableau 5.2.

5.2.2 Méthodes alternatives de validation

L'algorithme qui a été conçu permet d'obtenir des résultats que MSC/NASTRAN ne peut calculer. Malgré tout, ceux-ci doivent quand même être validés d'une façon quelconque. Une méthode alternative de validation a été déterminée afin de vérifier ces valeurs.

Le code d'éléments finis de référence permet d'obtenir directement les valeurs efficaces des résultats suivants:

- **déplacements**
- **vitesse**s
- **accélérations**
- **forces associées aux conditions frontières (SPC)**
- **forces élémentaires**
- **contraintes élémentaires**

La validation de ces résultats est triviale et s'effectue en comparant les valeurs efficaces obtenues par l'algorithme à celles calculées directement par MSC/NASTRAN. Par contre, en ce qui concerne les déformations élémentaires et les forces de type MPC, une méthode indirecte doit être employée.

La similarité dans la composition de ces deux derniers types de résultats avec les contraintes élémentaires et les forces de type SPC sera mise à profit. La façon de faire consiste en premier lieu à valider les algorithmes calculant les valeurs de contraintes et les forces de type SPC. Par la suite, l'algorithme sera temporairement modifié afin que les déformations soient calculées par l'algorithme traitant les contraintes et les forces de type MPC, par celui des forces de type SPC. Si les résultats générés par cette méthode temporaire sont identiques à ceux générés par la méthode originale, alors les algorithmes originaux développés pour les déformations et les forces de type MPC seront considérés comme étant valides.

En ce qui concerne la vérification des forces aux nœuds (grid point forces), MSC/NATRAN ne permet pas davantage de valider directement ce type de résultat. Comme ce dernier contient aussi les résultats associés aux forces de types SPC et MPC, la validation des forces aux nœuds s'effectuera en comparant ces forces calculées par leur algorithme respectif, à celles calculées

par l'algorithme traitant des forces aux nœuds. Parce que le calcul de ces forces est répétitif pour tous les nœuds, en ne validant que le résultat des forces de types SPC et MPC il est possible d'extrapoler et de conclure que l'algorithme calculant l'ensemble des forces aux nœuds est valide.

Finalement en ce qui concerne la contrainte de von Mises, comme MSC/NASTRAN ne calcule pas cette contrainte lorsque le chargement est aléatoire, la vérification s'effectuera en comparant les résultats générés par la méthode de Monte-Carlo à ceux générés par la méthode de Segalman. Ces méthodes utilisent respectivement des approches très différentes. Il est alors peu probable qu'une erreur figurant dans les deux méthodes puissent avoir exactement les mêmes conséquences et ainsi générer des résultats similaires mais erronés. Cette façon de procéder fut employée par Segalman [20] pour valider sa méthode.

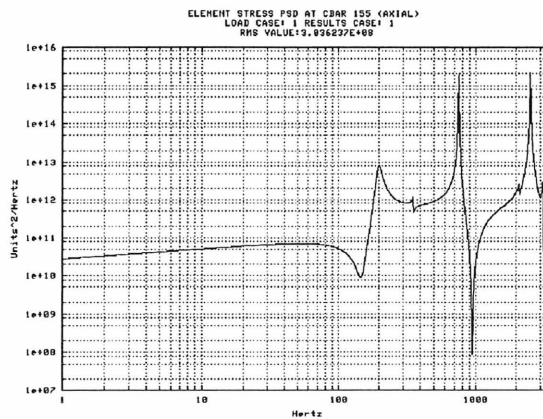
5.3 Validation du calcul des valeurs efficaces

Cette section consiste à comparer les résultats obtenus entre l'algorithme et MSC/NASTRAN. La valeur absolue de l'écart relatif entre la valeur calculée et la valeur de référence est utilisée pour la comparaison. Celle-ci se calcule de la façon suivante :

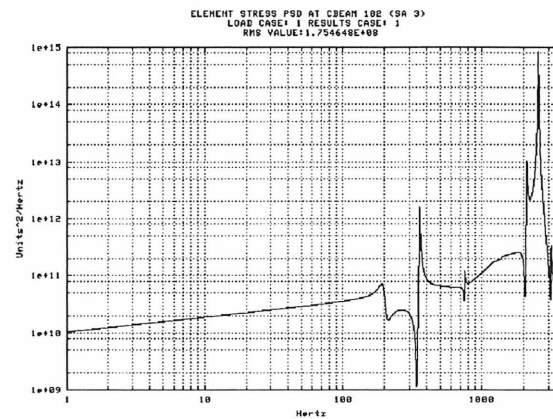
$$\frac{ABS(Valeur\ de\ référence - Valeur\ calculée)}{Valeur\ de\ référence} \quad (5.1)$$

Pour une méthode d'intégration spécifique, l'algorithme d'intégration utilisé est exactement le même pour tous les types de résultats et ce, pour tous les éléments et les nœuds. Il est donc inutile de vérifier l'ensemble des résultats, des nœuds et des éléments pour valider la méthode. Pour cette raison, seuls quelques résultats sont comparés dans ce mémoire. Les résultats qui ont été retenus pour la comparaison l'ont été au hasard et seul le souci d'avoir une variété importante de résultats a motivé ce choix.

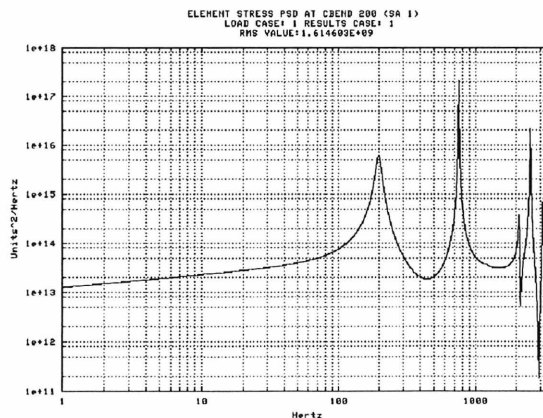
Les figures 5.7 à 5.10 contiennent les graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse qui doivent être intégrées afin d'obtenir la valeur efficace. Elles ont pour objectif de démontrer au lecteur l'allure des fonctions à intégrer afin qu'il puisse être en mesure de juger la performance des méthodes d'intégrations proposées.



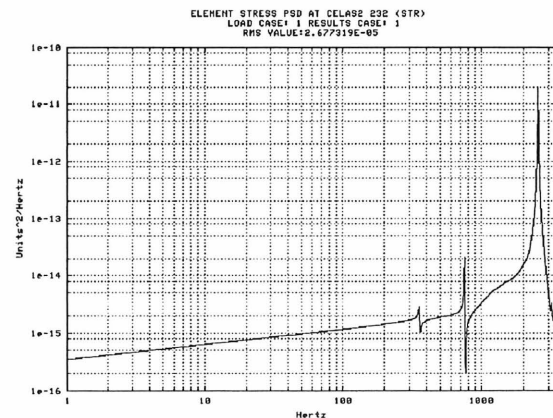
(a) CBAR 155, contrainte axiale



(b) CBEAM 182, contrainte A3

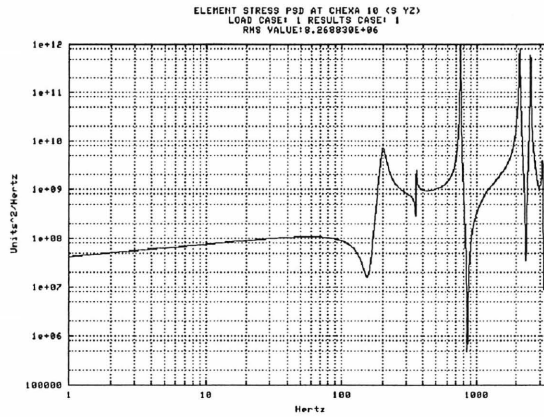


(c) CBEND 200, contrainte A1

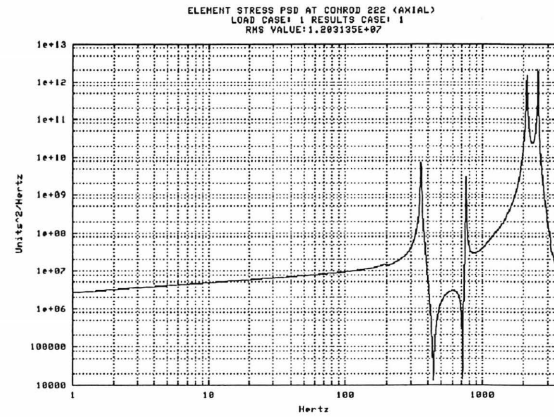


(d) CELAS2 232, contrainte X

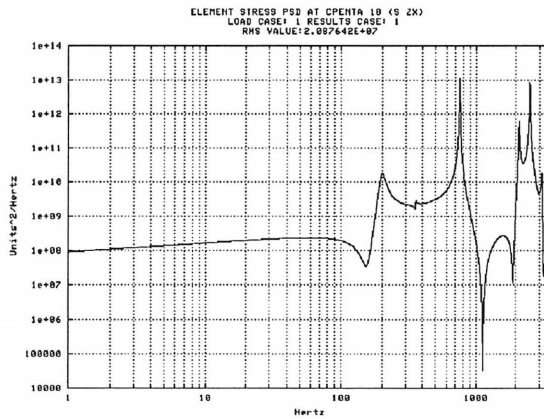
Figure 5.7 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 1)



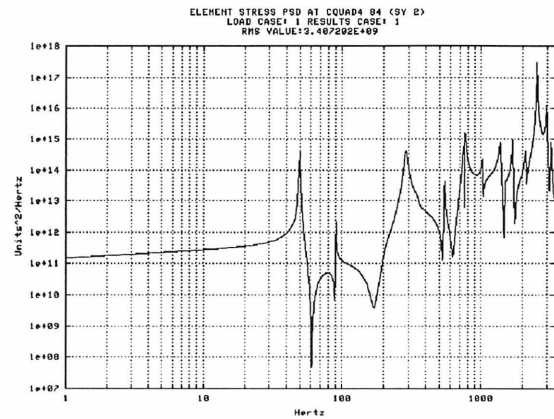
(a) CHEXA 10, contrainte YZ



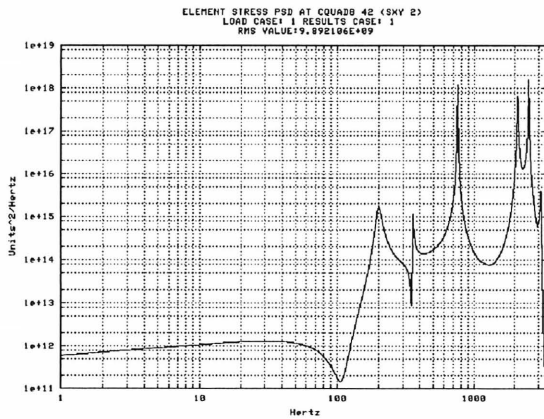
(b) CONROD 222, contrainte axiale



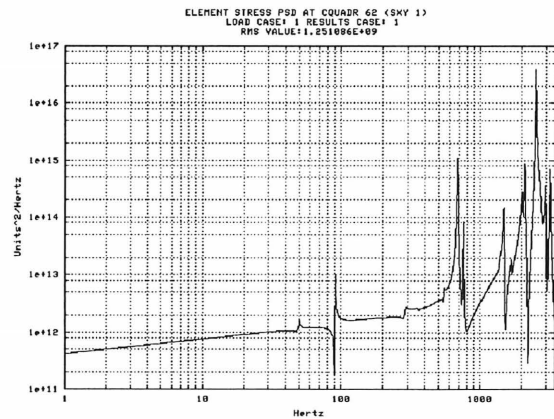
(c) CPENTA 18, contrainte ZX



(d) CQUAD4 84, contrainte Y, surface 2

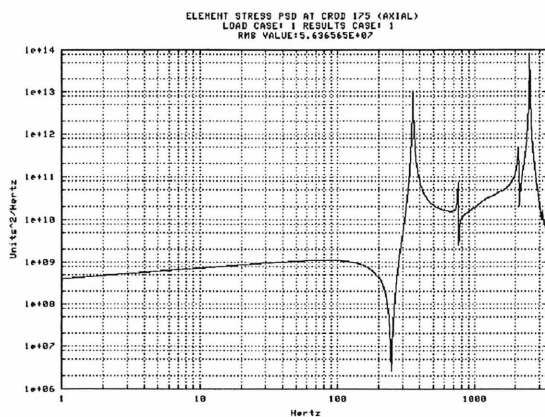


(e) CQUAD8 42, contrainte XY, surface 2

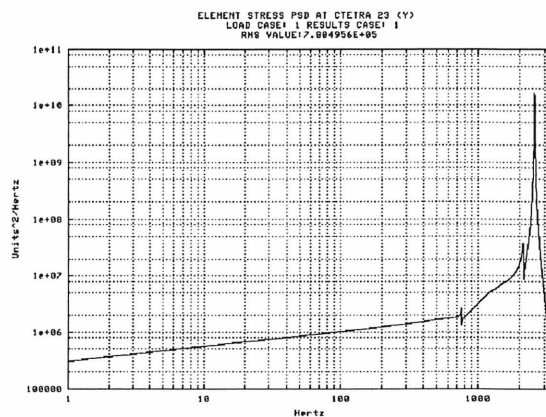


(f) CQUADR 62, contrainte XY, surface 1

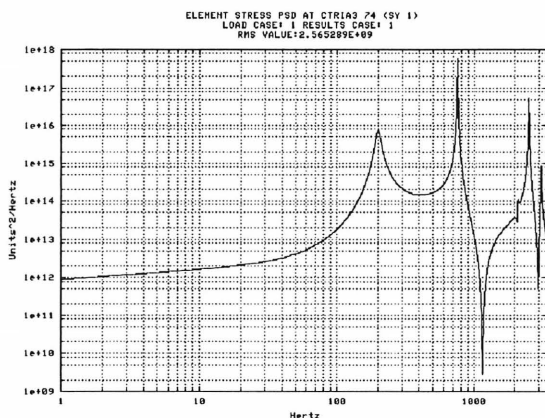
Figure 5.8 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 2)



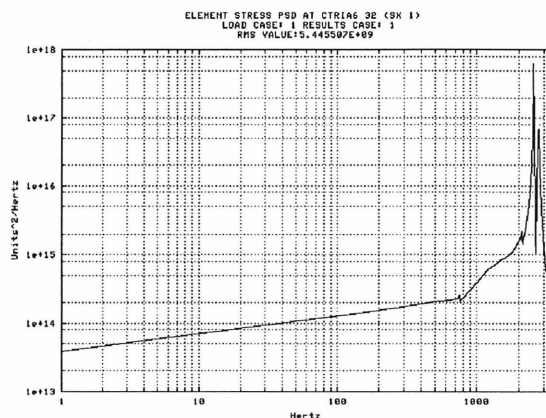
(a) CROD 175, contrainte axiale



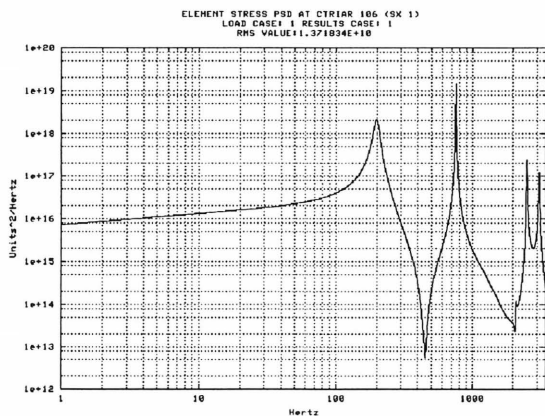
(b) CTETRA 23, contrainte Y



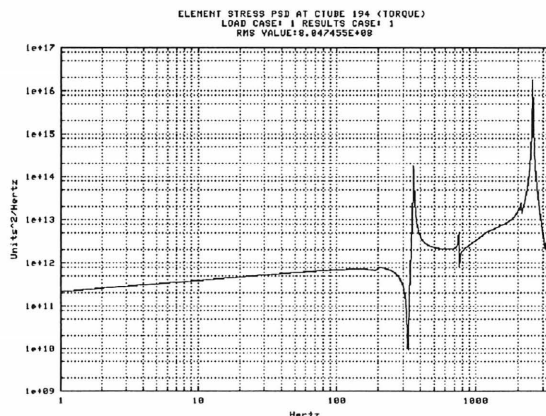
(c) CTRIA3 74, contrainte Y, surface 1



(d) CTRIA6 32, contrainte X, surface 1

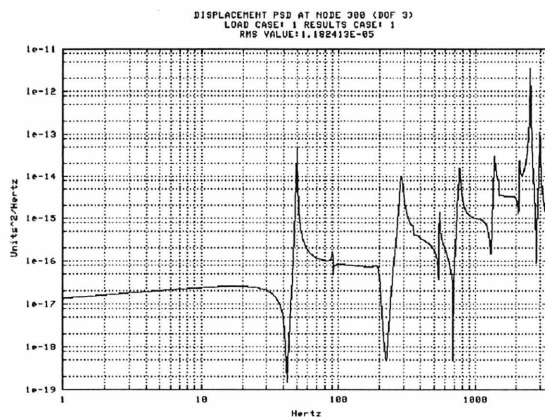


(e) CTRIAR 106, contrainte X, surface 1

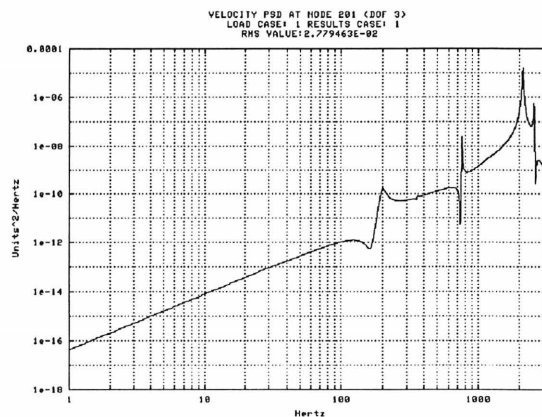


(f) CTUBE 194, torque

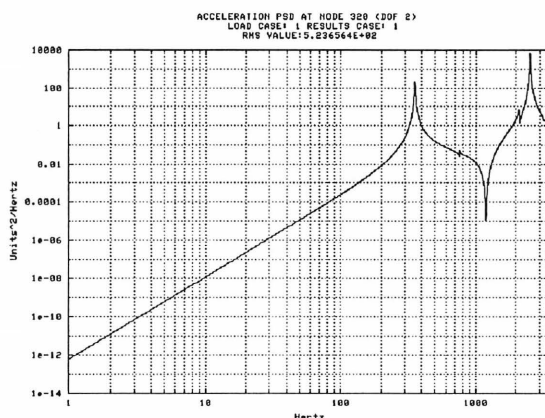
Figure 5.9 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 3)



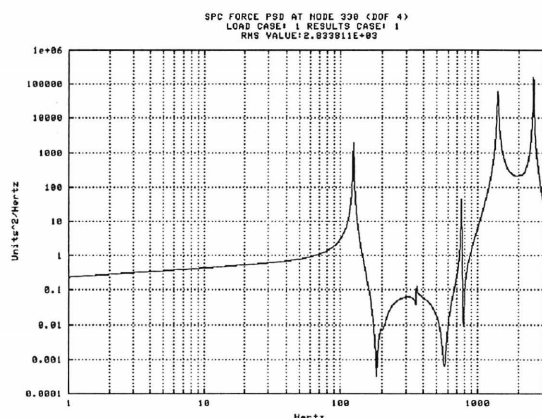
(d) nœud 300, T3, déplacement



(d) nœud 201, T3, vitesse



(e) nœud 320, T2, accélération



(f) nœud 330, R1, force de type SPC

Figure 5.10 Graphiques de la densité spectrale de puissance de la réponse pour une excitation d'amplitude variable (partie 4)

Le spectre variable de l'excitation démontré à la figure 5.3 ainsi que les facteurs d'amplification modale de la figure 5.4 ont été utilisés pour créer ces graphiques. L'utilisation de la densité spectrale de puissance de l'excitation d'amplitude constante en fréquence permet d'obtenir des graphiques qui sont légèrement différents de ceux qui sont présentés, mais qui possèdent une forme très similaire. Pour cette raison, ils ne sont pas présentés.

En ce qui concerne la validation des résultats lorsque la contribution associée à la flexibilité résiduelle est conservée, les graphiques de la DSP de la réponse ne présentent aucun intérêt en

particulier. En effet, seuls cinq modes élastiques sont conservés, et ceux-ci sont à peine excités. Les graphiques obtenues ont donc une forme très régulière. Pour cette raison, ils ne seront pas présentés.

5.3.1 Résultats obtenus par intégration analytique

Cette section contient les différents résultats obtenus par intégration analytique des DSP de la réponse en fonction de la forme de l'excitation. L'analyse des résultats s'effectuera à la fin de cette section. Le tableau 5.4 compare les valeurs efficaces de différents types de résultats obtenus par intégration analytique de la DSP d'amplitude variable de l'excitation avec ceux obtenus par MSC/NASTRAN. Le tableau 5.5 effectue une comparaison similaire lorsque l'excitation est d'amplitude constante.

Dans les tableaux suivants, la colonne *composante* indique quelle composante de contrainte ou de force a été retenue lorsque la comparaison porte sur un élément. Lorsqu'il s'agit d'un noeud, la colonne *composante* contient le type de résultat calculé à celui-ci. Les acronymes utilisés sont les mêmes que ceux utilisés par MSC/NASTRAN. Le lecteur est invité à consulter l'ouvrage mentionné en référence [13] s'il désire connaître la signification exacte de chacun de ces acronymes.

**TABEAU 5.4 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR INTÉGRATION ANALYTIQUE
(AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)**

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration analytique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	3.03679E+08	3.03580E+08	0.0326%
CBEAM 182	SA 3	1.75463E+08	1.75450E+08	0.0074%
CBEND 200	SA1	1.61562E+09	1.61430E+09	0.0816%
CELAS2 232	AXIAL	2.67730E-05	2.67721E-05	0.0034%
CHEXA 10	Syz	8.27000E+06	8.27045E+06	0.0054%
CONROD 222	AXIAL	1.20311E+07	1.20330E+07	0.0162%
CPENTA 18	Szx	2.08810E+07	2.08742E+07	0.0326%
CQUAD4 84	Sy 2	3.40725E+09	3.40588E+09	0.0401%
CQUAD8 42	Sxy 2	9.89299E+09	9.89263E+09	0.0037%
CQUADR 62	Sxy 1	1.25112E+09	1.25104E+09	0.0065%
CROD 175	AXIAL	5.63654E+07	5.62540E+07	0.1976%
CTETRA 23	Sy	7.80494E+05	7.80470E+05	0.0030%
CTRIA3 74	Sy 1	2.56719E+09	2.56421E+09	0.1159%
CTRIA6 32	Sx 1	5.44526E+09	5.44564E+09	0.0069%
CTRIAR 106	Sx 1	1.37221E+10	1.37186E+10	0.0255%
CTUBE 194	Sxy	8.04741E+08	8.04580E+08	0.0200%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.18239E-05	1.18190E-05	0.0418%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	2.77947E-02	2.78093E-02	0.0526%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	5.23660E+02	5.23428E+02	0.0443%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	2.83384E+03	2.83381E+03	0.0012%

**TABLEAU 5.5 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR INTÉGRATION ANALYTIQUE
(AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)**

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration analytique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	4.30129E+08	4.30050E+08	0.0184%
CBEAM 182	SA 3	2.48028E+08	2.48030E+08	0.0009%
CBEND 200	SA 1	2.32044E+09	2.31910E+09	0.0576%
CELAS2 232	AXIAL	3.78373E-05	3.78375E-05	0.0005%
CHEXA 10	Syz	1.11619E+07	1.11603E+07	0.0145%
CONROD 222	AXIAL	1.64457E+07	1.64460E+07	0.0016%
CPENTA 18	Szx	2.94903E+07	2.94836E+07	0.0228%
CQUAD4 84	Sy 2	4.94700E+09	4.94695E+09	0.0011%
CQUAD8 42	Sxy 2	1.37124E+10	1.37120E+10	0.0030%
CQUADR 62	Sxy 1	1.80389E+09	1.80384E+09	0.0026%
CROD 175	AXIAL	7.96454E+07	7.96460E+07	0.0008%
CTETRA 23	Sy	1.10257E+06	1.10257E+06	0.0000%
CTRIA3 74	Sy 1	3.66249E+09	3.65987E+09	0.0715%
CTRIA6 32	Sx 1	7.80779E+09	7.80813E+09	0.0043%
CTRIAR 106	Sx 1	2.08101E+10	2.08072E+10	0.0141%
CTUBE 194	Sxy	1.13714E+09	1.13710E+09	0.0031%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.69583E-05	1.69586E-05	0.0019%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	3.63263E-02	3.6326E-02	0.0006%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	7.44041E+02	7.44036E+02	0.0007%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	3.70874E+03	3.70872E+03	0.0004%

De ces deux derniers tableaux, il appert que la méthode analytique performe davantage en ce qui concerne la précision des résultats lorsque la DSP de l'excitation est d'amplitude constante que lorsqu'elle est d'amplitude variable et constituée de pentes non entières.

Les tableaux suivants démontrent la performance obtenue lorsque la contribution reliée à la flexibilité résiduelle est considérée.

TABEAU 5.6 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION ANALYTIQUE (AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration analytique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	6.28985E+02	6.28709E+02	0.0438%
CBEAM 184	SHP 2	2.10646E+02	2.10689E+02	0.0206%
CBEND 202	BM2	1.38114E+04	1.38058E+04	0.0402%
CELAS2 233	AXIAL	7.28883E-08	7.29017E-08	0.0184%
CONROD 221	AXIAL	2.73312E+03	2.73362E+03	0.0182%
CQUAD4 84	SHX	1.22964E-01	1.22701E-01	0.2136%
CQUAD8 41	MFY	7.68867E+05	7.69072E+05	0.0266%
CQUADR 65	MFX	2.59709E+03	2.59756E+03	0.0182%
CROD 172	AXIAL	5.68972E+04	5.69075E+04	0.0181%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	1.82265E+04	1.82299E+04	0.0184%
CTRIA3 79	BM	4.42081E-03	4.41913E-03	0.0381%
CTRIA6 30	MFX	4.50736E+04	4.50818E+04	0.0181%
CTRIAR 102	SHY	4.27988E+03	4.27810E+03	0.0415%
CTUBE 191	TORQUE	3.06922E-01	3.06958E-01	0.0118%

TABEAU 5.7 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION ANALYTIQUE (AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration analytique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	2.93876E+03	2.93729E+03	0.0502%
CBEAM 184	SHP 2	1.00462E+03	1.00464E+03	0.0019%
CBEND 202	BM2	6.47949E+04	6.47640E+04	0.0477%
CELAS2 233	AXIAL	3.47489E-07	3.47493E-07	0.0013%
CONROD 221	AXIAL	1.30296E+04	1.30297E+04	0.0005%
CQUAD4 84	SHX	5.69758E-01	5.69291E-01	0.0819%
CQUAD8 41	MFY	3.67082E+06	3.67114E+06	0.0086%
CQUADR 65	MFX	1.23815E+04	1.23815E+04	0.0000%
CROD 172	AXIAL	2.71248E+05	2.71248E+05	0.0000%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	8.68963E+04	8.68965E+04	0.0002%
CTRIA3 79	BM	2.07544E-02	2.07448E-02	0.0463%
CTRIA6 30	MFX	2.14878E+05	2.14879E+05	0.0007%
CTRIAR 102	SHY	1.99123E+04	1.99031E+04	0.0464%
CTUBE 191	TORQUE	1.46142E+00	1.46132E+00	0.0065%

Ces derniers tableaux (tableau 5.6 et tableau 5.7) valident la modification de la théorie concernant la méthode d'intégration analytique qui a été effectuée afin d'inclure l'effet de la contribution reliée à la flexibilité résiduelle.

Le tableau 5.8 présente la moyenne des écarts relatifs absolus calculés à partir des résultats figurant dans les quatre tableaux précédents.

TABLEAU 5.8 MOYENNE DES VALEURS ABSOLUES DES ÉCARTS RELATIFS OBTENUES AVEC LA MÉTHODE D'INTÉGRATION ANALYTIQUE.

	Sans la flexibilité résiduelle	Avec la flexibilité résiduelle
DSP constante	0.011%	0.021%
DSP variable	0.037%	0.039%

Finalement, notons que la méthode d'intégration analytique conformément à la théorie, performe davantage lorsque la densité spectrale de puissance de l'excitation est constante. Malgré tout, l'algorithme analytique permet de calculer d'excellents résultats.

La section suivante effectue le même exercice lorsque la méthode d'intégration numérique est sélectionnée.

5.3.2 Résultats obtenus par intégration numérique

Afin de pouvoir comparer ultérieurement de façon juste la performance des différentes méthodes d'intégration numérique et analytique, les mêmes éléments et composantes sont utilisées pour la validation de toutes les méthodes d'intégration.

Les tableaux 5.9 et 5.10 présentent les résultats obtenus par la méthode d'intégration numérique pour les deux formes d'excitation retenues pour la validation.

TABEAU 5.9 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE (AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration numérique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	3.03679E+08	3.03620E+08	0.0195%
CBEAM 182	SA 3	1.75463E+08	1.75460E+08	0.0017%
CBEND 200	SA1	1.61562E+09	1.61460E+09	0.0630%
CELAS2 232	AXIAL	2.67731E-05	2.67732E-05	0.0004%
CHEXA 10	Syz	8.27000E+06	8.26883E+06	0.0142%
CONROD 222	AXIAL	1.20311E+07	1.20310E+07	0.0004%
CPENTA 18	Szx	2.08810E+07	2.08764E+07	0.0220%
CQUAD4 84	Sy 2	3.40725E+09	3.40720E+09	0.0014%
CQUAD8 42	Sxy 2	9.89299E+09	9.89211E+09	0.0089%
CQUADR 62	Sxy 1	1.25112E+09	1.25109E+09	0.0025%
CROD 175	AXIAL	5.63654E+07	5.63660E+07	0.0011%
CTETRA 23	Sy	7.80494E+05	7.80496E+05	0.0003%
CTRIA3 74	Sy 1	2.56719E+09	2.56529E+09	0.0738%
CTRIA6 32	Sx 1	5.44526E+09	5.44551E+09	0.0045%
CTRIAR 106	Sx 1	1.37221E+10	1.37183E+10	0.0277%
CTUBE 194	Sxy	8.04741E+08	8.04750E+08	0.0011%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.18239E-05	1.18241E-05	0.0019%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	2.77947E-02	2.77946E-02	0.0004%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	5.23660E+02	5.23656E+02	0.0007%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	2.83384E+03	2.83381E+03	0.0012%

**TABLEAU 5.10 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE
(AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)**

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration numérique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	4.30129E+08	4.30050E+08	0.0184%
CBEAM 182	SA 3	2.48028E+08	2.48030E+08	0.0009%
CBEND 200	SA1	2.32044E+09	2.31910E+09	0.0576%
CELAS2 232	AXIAL	3.78373E-05	3.78375E-05	0.0005%
CHEXA 10	Syz	1.11619E+07	1.11602E+07	0.0154%
CONROD 222	AXIAL	1.64457E+07	1.64460E+07	0.0016%
CPENTA 18	Szx	2.94903E+07	2.94836E+07	0.0228%
CQUAD4 84	Sy 2	4.94700E+09	4.94695E+09	0.0011%
CQUAD8 42	Sxy 2	1.37124E+10	1.37112E+10	0.0088%
CQUADR 62	Sxy 1	1.80389E+09	1.80384E+09	0.0026%
CROD 175	AXIAL	7.96454E+07	7.96460E+07	0.0008%
CTETRA 23	Sy	1.10257E+06	1.10257E+06	0.0000%
CTRIA3 74	Sy 1	3.66249E+09	3.65987E+09	0.0715%
CTRIA6 32	Sx 1	7.80779E+09	7.80813E+09	0.0043%
CTRIAR 106	Sx 1	2.08101E+10	2.08072E+10	0.0141%
CTUBE 194	Sxy	1.13714E+09	1.13710E+09	0.0031%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.69583E-05	1.69586E-05	0.0019%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	3.63263E-02	3.63265E-02	0.0005%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	7.44041E+02	7.44036E+02	0.0008%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	3.70874E+03	3.70872E+03	0.0004%

Contrairement à la méthode analytique, les valeurs calculées par la méthode d'intégration numérique semblent moins affectés par la forme de la DSP utilisée, car les valeurs absolues des écarts relatifs sont similaires pour les deux types d'excitation. De plus, les valeur de ceux-ci sont très faible, ce qui valide la méthode d'intégration numérique qui a été implantée.

Les deux tableaux suivants présentent les résultats obtenus par intégration numérique lorsque la contribution associée à la flexibilité résiduelle est ajoutée.

TABLEAU 5.11 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE (AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration numérique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	6.28985E+02	6.28615E+02	0.0588%
CBEAM 184	SHP 2	2.10646E+02	2.10650E+02	0.0020%
CBEND 202	BM2	1.38114E+04	1.38035E+04	0.0568%
CELAS2 233	AXIAL	7.28883E-08	7.28884E-08	0.0001%
CONROD 221	AXIAL	2.73312E+03	2.73312E+03	0.0001%
CQUAD4 84	SHX	1.22964E-01	1.22848E-01	0.0941%
CQUAD8 41	MFY	7.68867E+05	7.68933E+05	0.0086%
CQUADR 65	BMXY	2.59709E+03	2.59709E+03	0.0001%
CROD 172	AXIAL	5.68972E+04	5.68971E+04	0.0002%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	1.82265E+04	1.82266E+04	0.0003%
CTRIA3 79	BMX	4.42081E-03	4.41837E-03	0.0553%
CTRIA6 30	MFY	4.50736E+04	4.50736E+04	0.0000%
CTRIAR 102	SHY	4.27988E+03	4.27756E+03	0.0542%
CTUBE 191	TORQUE	3.06922E-01	3.06902E-01	0.0065%

TABLEAU 5.12 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE (AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration numérique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	2.93876E+03	2.93729E+03	0.0502%
CBEAM 184	SHP 2	1.00462E+03	1.00464E+03	0.0019%
CBEND 202	BM2	6.47949E+04	6.47640E+04	0.0477%
CELAS2 233	AXIAL	3.47489E-07	3.47493E-07	0.0013%
CONROD 221	AXIAL	1.30296E+04	1.30297E+04	0.0005%
CQUAD4 84	SHX	5.69758E-01	5.69291E-01	0.0819%
CQUAD8 41	MFY	3.67082E+06	3.67114E+06	0.0086%
CQUADR 65	BMXY	1.23815E+04	1.23815E+04	0.0000%
CROD 172	AXIAL	2.71248E+05	2.71248E+05	0.0000%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	8.68963E+04	8.68965E+04	0.0002%
CTRIA3 79	BMX	2.07544E-02	2.07448E-02	0.0463%
CTRIA6 30	MFY	2.14878E+05	2.14879E+05	0.0007%
CTRIAR 102	SHY	1.99123E+04	1.99031E+04	0.0464%
CTUBE 191	TORQUE	1.46142E+00	1.46132E+00	0.0065%

À la lecture de ces deux derniers tableaux, il est permis d'affirmer que la méthode d'intégration numérique génère de bons résultats lorsque l'effet de la flexibilité résiduelle est pris en compte. En observant les résultats du tableau 5.13, il est évident que la forme de la DSP de l'excitation affecte peu la valeur des résultats calculés.

TABLEAU 5.13 MOYENNE DES VALEURS ABSOLUES DES ÉCARTS RELATIFS OBTENUES AVEC LA MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE.

	Sans la flexibilité résiduelle	Avec la flexibilité résiduelle
DSP constante	0.012%	0.021%
DSP variable	0.013%	0.024%

Pour conclure cette section, il est possible d'affirmer que l'algorithme d'intégration numérique de Gauss-Kronrod génère d'excellents résultats tout comme l'algorithme d'intégration analytique. Le point suivant s'attarde à comparer les résultats générés par la méthode d'intégration numérique améliorée.

5.3.3 Résultats obtenus par la méthode d'intégration numérique améliorée

Cette section contient les résultats obtenus en utilisant la méthode d'intégration numérique améliorée. Afin de pouvoir effectuer ultérieurement une évaluation juste de l'efficacité des différentes méthodes développées, les éléments et les composantes utilisés pour la comparaison sont les mêmes que ceux utilisés précédemment.

Le tableau 5.14 présente les résultats obtenus par cette dernière méthode pour la forme de densité spectrale de puissance variable, alors que le tableau 5.15 fait de même lorsque la forme de l'excitation est constante.

TABLEAU 5.14 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE AMÉLIORÉE (AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Numérique améliorée	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	3.03679E+08	3.03620E+08	0.0195%
CBEAM 182	SA 3	1.75463E+08	1.75460E+08	0.0017%
CBEND 200	SA1	1.61562E+09	1.61460E+09	0.0630%
CELAS2 232	AXIAL	2.67731E-05	2.67732E-05	0.0004%
CHEXA 10	Syz	8.27000E+06	8.26884E+06	0.0140%
CONROD 222	AXIAL	1.20311E+07	1.20310E+07	0.0004%
CPENTA 18	Szx	2.08810E+07	2.08764E+07	0.0220%
CQUAD4 84	Sy 2	3.40725E+09	3.40720E+09	0.0014%
CQUAD8 42	Sxy 2	9.89299E+09	9.89211E+09	0.0089%
CQUADR 62	Sxy 1	1.25112E+09	1.25109E+09	0.0025%
CROD 175	AXIAL	5.63654E+07	5.63660E+07	0.0011%
CTETRA 23	Sy	7.80494E+05	7.80496E+05	0.0003%
CTRIA3 74	Sy 1	2.56719E+09	2.56529E+09	0.0738%
CTRIA6 32	Sx 1	5.44526E+09	5.44551E+09	0.0045%
CTRIAR 106	Sx 1	1.37221E+10	1.37183E+10	0.0277%
CTUBE 194	Sxy	8.04741E+08	8.04750E+08	0.0011%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.18239E-05	1.18241E-05	0.0019%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	2.77947E-02	2.77946E-02	0.0004%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	5.23660E+02	5.23656E+02	0.0007%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	2.83384E+03	2.83381E+03	0.0012%

TABLEAU 5.15 VALEURS EFFICACES OBTENUES PAR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE AMÉLIORÉE (AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Variable	Composante	MSC/NASTRAN	Segalman modifiée	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 155	AXIAL	4.30129E+08	4.30050E+08	0.0184%
CBEAM 182	SA 3	2.48028E+08	2.48030E+08	0.0009%
CBEND 200	SA1	2.32044E+09	2.31910E+09	0.0576%
CELAS2 232	AXIAL	3.78373E-05	3.78375E-05	0.0005%
CHEXA 10	Syz	1.11619E+07	1.11602E+07	0.0154%
CONROD 222	AXIAL	1.64457E+07	1.64460E+07	0.0016%
CPENTA 18	Szx	2.94903E+07	2.94836E+07	0.0228%
CQUAD4 84	Sy 2	4.94700E+09	4.94695E+09	0.0011%
CQUAD8 42	Sxy 2	1.37124E+10	1.37112E+10	0.0088%
CQUADR 62	Sxy 1	1.80389E+09	1.80384E+09	0.0026%
CROD 175	AXIAL	7.96454E+07	7.96460E+07	0.0008%
CTETRA 23	Sy	1.10257E+06	1.10257E+06	0.0000%
CTRIA3 74	Sy 1	3.66249E+09	3.65987E+09	0.0715%
CTRIA6 32	Sx 1	7.80779E+09	7.80813E+09	0.0043%
CTRIAR 106	Sx 1	2.08101E+10	2.08072E+10	0.0141%
CTUBE 194	Sxy	1.13714E+09	1.13710E+09	0.0031%
NOEUD 300 (T3)	DÉPLACEMENT	1.69583E-05	1.69586E-05	0.0019%
NOEUD 201 (T3)	VITESSE	3.63263E-02	3.63265E-02	0.0005%
NOEUD 320 (T2)	ACCÉLÉRATION	7.44041E+02	7.44036E+02	0.0008%
NOEUD 330 (R1)	FORCE SPC	3.70874E+03	3.70872E+03	0.0004%

Les résultats obtenus par la méthode d'intégration numérique améliorée sont identiques à ceux générés par la méthode d'intégration classique. Il est tout à fait normal qu'il en soit ainsi car la méthode d'intégration numérique améliorée n'a comme différence, avec la méthode numérique classique, que les intégrations répétitives ne sont effectuées qu'une seule fois. Le même exercice est effectué lorsque la contribution associée à la flexibilité résiduelle est conservée.

TABLEAU 5.16 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE AMÉLIORÉE (AMPLITUDE VARIABLE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Numérique améliorée	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	6.28985E+02	6.28615E+02	0.0588%
CBEAM 184	SHP 2	2.10646E+02	2.10651E+02	0.0024%
CBEND 202	BM2	1.38114E+04	1.38035E+04	0.0568%
CELAS2 233	AXIAL	7.28883E-08	7.28886E-08	0.0004%
CONROD 221	AXIAL	2.73312E+03	2.73312E+03	0.0001%
CQUAD4 84	SHX	1.22964E-01	1.22848E-01	0.0941%
CQUAD8 41	MFY	7.68867E+05	7.68934E+05	0.0087%
CQUADR 65	MFXY	2.59709E+03	2.59709E+03	0.0001%
CROD 172	AXIAL	5.68972E+04	5.68973E+04	0.0002%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	1.82265E+04	1.82266E+04	0.0003%
CTRIA3 79	BMX	4.42081E-03	4.41837E-03	0.0553%
CTRIA6 30	MFY	4.50736E+04	4.50737E+04	0.0002%
CTRIAR 102	SHY	4.27988E+03	4.27757E+03	0.0540%
CTUBE 191	TORQUE	3.06922E-01	3.06902E-01	0.0065%

TABLEAU 5.17 VALEURS EFFICACES, AVEC FLEXIBILITÉ RÉSIDUELLE, OBTENUES PAR INTÉGRATION NUMÉRIQUE (AMPLITUDE CONSTANTE DE LA DSP DE L'EXCITATION)

Élément	Composante	MSC/NASTRAN	Intégration numérique	Valeur absolue de l'écart relatif
CBAR 151	BM A1	2.93876E+03	2.93729E+03	0.0502%
CBEAM 184	SHP 2	1.00462E+03	1.00464E+03	0.0019%
CBEND 202	BM2	6.47949E+04	6.47640E+04	0.0477%
CELAS2 233	AXIAL	3.47489E-07	3.47493E-07	0.0013%
CONROD 221	AXIAL	1.30296E+04	1.30297E+04	0.0005%
CQUAD4 84	SHX	5.69758E-01	5.69292E-01	0.0818%
CQUAD8 41	MFY	3.67082E+06	3.67114E+06	0.0086%
CQUADR 65	MFXY	1.23815E+04	1.23815E+04	0.0000%
CROD 172	AXIAL	2.71248E+05	2.71248E+05	0.0000%
CSHEAR 217	FORCE 3 TO 2	8.68963E+04	8.68966E+04	0.0003%
CTRIA3 79	BMX	2.07544E-02	2.07448E-02	0.0463%
CTRIA6 30	MFY	2.14878E+05	2.14879E+05	0.0007%
CTRIAR 102	SHY	1.99123E+04	1.99031E+04	0.0464%
CTUBE 191	TORQUE	1.46142E+00	1.46132E+00	0.0065%

Les résultats obtenus par la méthode d'intégration numérique améliorée lorsque la contribution associée à la flexibilité résiduelle est retenue sont encore une fois presque identiques à ceux générés par la méthode numérique classique.

TABLEAU 5.18 MOYENNE DES VALEURS ABSOLUES DES ÉCARTS RELATIFS OBTENUES AVEC LA MÉTHODE D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE AMÉLIORÉE.

	Sans la flexibilité résiduelle	Avec la flexibilité résiduelle
DSP constante	0.012%	0.021%
DSP variable	0.013%	0.024%

Notons que les modifications qui ont été effectuées au sein de l'algorithme d'intégration numérique afin d'aboutir à la méthode d'intégration numérique améliorée n'ont pas affecté les valeurs des résultats calculés. La méthode d'intégration numérique améliorée n'est qu'une formulation différente de la méthode numérique classique. Le point suivant s'attarde à évaluer la performance des différentes méthodes d'intégration par rapport aux autres.

5.3.4 Comparaison entre les valeurs analytiques et numériques

En comparant les différents résultats décrits aux points précédents, l'observation des valeurs absolues des écarts relatifs permet d'affirmer que les résultats obtenus par l'algorithme analytique sont sensiblement identiques à ceux calculés à l'aide de MSC/NASTRAN. Cependant, il est possible de déceler certaines faiblesses de cette méthode. Celle-ci est très précise lorsque la densité spectrale de l'excitation est constante sur la bande de fréquences d'intérêt. Même que pour cette forme d'excitation, les valeurs absolues des écarts relatifs sont similaires pour les trois méthodes. Ce n'est pas le cas pour la DSP formée de segments multiples de pente non entière. Pour cette forme d'excitation, l'approximation du segment par un polynôme est sans doute la cause de cette imprécision si minime soit-elle. Comme les valeurs absolues des écarts relatifs

figurant aux divers tableaux sont faibles il est possible de conclure que les trois méthodes génèrent de très bons résultats.

Lorsque la DSP est d'amplitude constante, les valeurs obtenues en utilisant la méthode analytique sont exactes. En théorie, il en est de même lorsque la pente de chacun des segments de la DSP est exprimée par un entier. En pratique cependant, même pour ce cas l'algorithme doit effectuer une approximation qui peut générer de faibles écarts entre la valeur exacte et la valeur calculée. Finalement, comme les valeurs obtenues par la méthode analytique sont identiques à celles obtenues selon la méthode numérique pour une DSP d'amplitude constante, il ne fait aucun doute que la méthode d'intégration numérique de Gauss-Kronrod est en mesure de générer des résultats très précis, malgré la forme assez complexe des fonctions à intégrer.

Temps de calcul de chacune des méthodes

Même si la précision des valeurs obtenues est le critère primordial afin de valider la méthode, le temps de calcul se situe immédiatement après celui-ci. L'objectif principal qui a motivé le développement des différentes méthodes d'intégration analytiques était d'améliorer la précision des valeurs calculées mais aussi de réduire de façon significative le temps de calcul. Le tableau suivant résume le temps moyen de calcul nécessaire pour calculer les contraintes et les forces associées à tous les éléments du modèle utilisés pour la validation.

Pour effectuer cette comparaison, les paramètres suivants ont été utilisés pour chaque essai :

- 367 valeurs efficaces ont été calculées;
- Les 30 premiers modes élastiques ont été retenus;
- Les densités spectrales de l'excitation utilisées sont celles illustrées aux figures 5.2 et 5.3;
- Les facteurs d'amplification modale utilisés sont ceux fournis au tableau 5.2;

- La bande de fréquences d'intégration utilisée est celle allant de 1 à 3500 Hz;
- Pour l'analyse aléatoire effectuée par MSC/NASTRAN, 6410 points sont utilisés pour évaluer chacune des courbes de la DSP de la réponse;
- L'ensemble des calculs ont été effectués sur le même ordinateur.

TABLEAU 5.19 TEMPS MOYENS DE CALCUL DE DIVERSES MÉTHODES EN FONCTION DU TYPE D'EXCITATION

	Intégration numérique	Intégration analytique	Numérique améliorée	MSC/NASTRAN⁷
DSP constante	124 secondes	36 secondes	6 secondes	686 secondes
DSP variable	129 secondes	942 secondes	8 secondes	697 secondes

Pour une densité spectrale de l'excitation d'amplitude constante, la méthode d'intégration analytique permet d'obtenir des résultats similaires à ceux générés par la méthode numérique classique, mais quatre fois plus rapidement. Par contre la méthode analytique est nettement désavantageuse lorsque la DSP est composée de plusieurs segments de pente quelconque. La méthode numérique améliorée, tant qu'à elle, est très performante peu importe la forme de la densité spectrale de puissance de l'excitation. Cette performance est en bonne partie attribuable au faible nombre d'intégrations qui doivent être effectuée avec cette méthode, comparée aux méthodes classiques d'intégration numérique ou analytique.

Pour conclure cette section, la méthode d'intégration numérique améliorée est la plus efficace pour effectuer les calculs pour les deux conditions étudiées. De plus, cette efficacité ne provoque pas en contre-partie une détérioration de la précision des résultats calculés.

⁷ Le temps mentionné a été compté à partir de la fin de l'analyse modale jusqu'à la fin de l'analyse aléatoire.

5.4 Validation du calcul de la contrainte de von Mises

Comme le logiciel MSC/NASTRAN ne calcule pas la contrainte de von Mises pour une excitation aléatoire, ce dernier n'interviendra pas dans la validation de celle-ci. La méthode de validation utilisée consiste à comparer les valeurs obtenues par la méthode de Monte-Carlo et celles obtenues par la méthode analytique de Segalman associée à une probabilité quelconque, qui pour ce cas a été fixée à 99,87% (3σ).

5.4.1 Comparaison de la valeur de la contrainte de von Mises

En utilisant le même modèle qu'au point précédent, la valeur de la contrainte de von Mises a été calculée pour divers types d'éléments. Comme l'exactitude des résultats calculés par la méthode de Monte-Carlo est directement fonction du nombre d'échantillons utilisés, plusieurs quantités d'échantillons, soit 100 000, 200 000, 500 000 et 1 000 000, sont utilisés pour la validation. Les paramètres utilisés (DSP d'excitation, amplification modale, modes utilisés, etc.) sont exactement les mêmes que ceux employés pour valider la méthode d'intégration numérique sans flexibilité résiduelle avec une DSP constante.

Le tableau 5.20 présente les valeurs de la contrainte de von Mises calculées par Segalman et par Monte-Carlo qui sont associées à une probabilité de 99.87%.

TABLEAU 5.20 COMPARAISON DES VALEURS DE LA CONTRAINTE DE VON MISES ASSOCIÉES À UNE PROBABILITÉ DE 99,87%

Éléments	Segalman	MC (100 000)	MC (200 000)	MC (500 000)	MC (1 000 000)
CHEXA 10	6.4597E+09	6.3891E+09	6.5469E+09	6.4693E+09	6.4691E+09
CPENTA 18	9.4093E+08	9.4802E+08	9.4105E+08	9.3958E+08	9.4034E+08
CTETRA 23	2.7118E+07	2.6720E+07	2.7032E+07	2.7023E+07	2.7172E+07
CTRIA6 32 (SUP.)	2.5512E+10	2.5901E+10	2.5832E+10	2.6064E+10	2.5917E+10
CQUAD8 42 (INF.)	2.1817E+12	2.1944E+12	2.1603E+12	2.1875E+12	2.1835E+12
CQUADR 67 (SUP.)	1.7346E+10	1.7149E+10	1.7469E+10	1.7472E+10	1.7449E+10
CTRIA3 74 (INF.)	3.6822E+10	3.7266E+10	3.6882E+10	3.7163E+10	3.6753E+10
CQUAD4 84 (SUP.)	3.3489E+10	3.3814E+10	3.3414E+10	3.3851E+10	3.3735E+10
CTRIAR 106 (INF.)	5.6083E+11	5.6799E+11	5.5623E+11	5.6085E+11	5.6115E+11
CROD 175	2.5636E+08	2.5657E+08	2.5838E+08	2.5668E+08	2.5661E+08
CTUBE 194	6.3396E+09	6.3765E+09	6.3646E+09	6.3376E+09	6.3218E+09
CONROD 222	5.2936E+07	5.2919E+07	5.2969E+07	5.2595E+07	5.3068E+07

Le tableau 5.21 contient les écarts relatifs absolus calculés entre la méthode de Segalman et la méthode de Monte-Carlo pour les différentes quantités d'échantillons utilisées.

TABLEAU 5.21 VALEUR ABSOLUE DES ÉCARTS RELATIFS ENTRE LES VALEURS DE CONTRAINTES DE VON MISES OBTENUES PAR LES DIFFÉRENTES MÉTHODES.

Éléments	MC 100 000 vs. Segalman	MC 200 000 vs. Segalman	MC 500 000 vs. Segalman	MC 1 000 000 vs. Segalman
CHEXA 10	1.09%	1.35%	0.15%	0.15%
CPENTA 18	0.75%	0.01%	0.14%	0.06%
CTETRA 23	1.47%	0.32%	0.35%	0.20%
CTRIA6 32 (SUP.)	1.53%	1.25%	2.16%	1.59%
CQUAD8 42 (INF.)	0.58%	0.98%	0.26%	0.08%
CQUADR 67 (SUP.)	1.14%	0.71%	0.73%	0.60%
CTRIA3 74 (INF.)	1.21%	0.16%	0.93%	0.19%
CQUAD4 84 (SUP.)	0.97%	0.22%	1.08%	0.73%
CTRIAR 106 (INF.)	1.28%	0.82%	0.00%	0.06%
CROD 175	0.08%	0.79%	0.13%	0.10%
CTUBE 194	0.58%	0.39%	0.03%	0.28%
CONROD 222	0.03%	0.06%	0.64%	0.25%

En comparant la similitude des résultats obtenus par les deux méthodes ainsi que les faibles valeurs absolues des écarts relatifs calculées au tableau précédent, il est possible d'affirmer que les méthodes de Monte-Carlo et de Segalman se valident mutuellement. Le paragraphe suivant aborde la rapidité de calcul de chacun des deux méthodes.

Temps de calcul de chacune des méthodes

Afin de comparer la rapidité des méthodes proposées, la contrainte de von Mises a été calculée en utilisant des paramètres constants pour les 128 éléments du modèle dont la contrainte de von Mises peut être obtenue. Le tableau suivant présente les temps de calculs obtenus ainsi que la valeurs absolues des écarts relatifs moyens calculées entre les valeurs générées par Segalman et celles par Monte-Carlo.

TABLEAU 5.22 PERFORMANCES DES MÉTHODES DE MONTE-CARLO ET SEGALMAN

Méthode utilisée	Temps de calcul	Valeur absolue de l'écart relatif moyen comparé à la méthode de Segalman
Segalman	6 secondes	N/A
Monte-Carlo – 100 000 échantillons	134 secondes	0.824%
Monte-Carlo – 200 000 échantillons	218 secondes	0.544%
Monte-Carlo – 500 000 échantillons	470 secondes	0.509%
Monte-Carlo - 1 000 000 échantillons	848 secondes	0.329%

En observant ce tableau, il est évident que le temps de calcul augmente considérablement avec le nombre d'échantillons utilisés et qu'en même temps, les résultats calculés tendent vers ceux générés par Segalman.

5.4.2 Méthode la plus appropriée

Il ne fait aucun doute que la méthode la plus efficace permettant de calculer la fonction de densité de probabilité de la contrainte de von Mises est celle de Segalman. Celle-ci, en plus de générer des résultats analytiques, surclasse la méthode de Monte-Carlo par sa rapidité et sa robustesse.

5.5 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif de vérifier l'exactitude des résultats calculés par l'algorithme dans le cadre de ce projet de maîtrise. Il a été démontré que les méthodes d'intégration numérique, numérique améliorée et analytique génèrent des résultats très similaires à ceux que MSC/NASTRAN calcule. La valeur absolue de l'écart relatif est toujours inférieure à 1% dans

tous les cas. Ainsi, les trois méthodes d'intégration sont considérées comme étant en mesure de générer des résultats justes.

Cependant, lorsqu'une densité spectrale de puissance de l'excitation possédant plusieurs segments de pente quelconque est utilisée comme source d'excitation, la méthode analytique est nettement désavantagée par rapport à la méthode numérique en ce qui a trait au temps de calcul requis. Ce phénomène était appréhendé lors de l'implantation de l'algorithme analytique. C'est ce qui motive en grande partie la présence d'une seconde méthode d'intégration numérique dans l'algorithme.

En ce qui concerne le calcul de la contrainte de von Mises, la méthode de Segalman démontre une efficacité hors du commun. Alors que jusqu'à tout récemment, la méthode de Monte-Carlo semblait être la seule capable de calculer cette contrainte avec une précision acceptable mais avec un temps de calcul considérable, la méthode de Segalman révolutionne le calcul de cette contrainte. Cette récente méthode produit des valeurs très précises qui se comparent avantageusement à celles générées par Monte-Carlo mais pour un temps de calcul très inférieur.

Chapitre 6

Limites du code

Le code développé dans le cadre de ce projet a certaines limites. Certaines furent imposées par les hypothèses de départ, et d'autres pour simplifier l'algorithme développé.

Les limites concernant le type de structure sont :

- Le modèle d'éléments finis de la structure doit être linéaire et ne contenir aucun amortissement physique.
- L'excitation aléatoire stationnaire doit être une seule accélération s'exerçant à la base et en translation seulement. Le DMAP qui a été développé ne permet pas de calculer les modes rigides de rotation.
- L'amortissement doit être purement modal et spécifié par l'intermédiaire du coefficient d'amplification Q . L'algorithme ne considère aucunement l'amortissement structural qui peut être spécifié sur certains éléments, comme les CELAS, et sur les cartes définissant le matériau utilisé, comme la carte MAT1.
- La composante de flexibilité résiduelle dépend du nombre de modes élastiques retenus lors de l'analyse modale. Si l'utilisateur désire utiliser un nombre inférieur de modes lors de l'analyse aléatoire, la composante de flexibilité résiduelle calculée par MSC/NASTRAN auparavant ne sera plus valide.

Conclusion

Dans ce mémoire, le développement d'un algorithme permettant de calculer la réponse des structures linéaires déterministes excitées à la base par une accélération aléatoire stationnaire est présenté. Les principaux objectifs de ce projet de maîtrise étaient les suivants :

- La création d'une méthode d'analyse aléatoire simple d'utilisation. Cette simplification devait être reliée autant à la création du fichier usager qu'à l'analyse des résultats.
- L'amélioration de la rapidité de calcul généralement nécessaire pour ce type d'analyse.

La méthode numérique proposée simplifie ce type d'analyse effectuée généralement par MSC/NASTRAN dans l'industrie aérospatiale. Cette simplification porte principalement sur les points suivants :

- L'utilisation d'un fichier usager qui permet de spécifier facilement les paramètres de l'analyse aléatoire. Principalement, l'énumération des éléments et des nœuds retenus pour l'analyse aléatoire s'effectue simplement pour chaque type de résultats.
- Une méthode d'intégration numérique très performante, adaptative, dont les résultats ne sont pas fonction d'une résolution fréquentielle spécifiée par l'utilisateur. Pour le cas d'une analyse aléatoire effectuée par MSC/NASTRAN, une telle résolution doit obligatoirement être

spécifiée. Ainsi, un usager peu familier avec ce dernier logiciel pourrait spécifier une résolution fréquentielle peu appropriée qui engendrerait des valeurs erronées.

- Une méthode d'intégration analytique qui, pour certaine forme de densité spectrale de puissance, calcule des résultats exacts pour un temps de calcul inférieur à celui requis par la méthode numérique classique.
- Une modification de l'écriture des équations qui permettent de calculer la réponse d'une structure excitée aléatoirement afin de réduire drastiquement le temps de calcul tout en n'affectant pas la précision des résultats obtenus.
- Le calcul de la contrainte de von Mises dans un environnement aléatoire en utilisant une méthode très récente de type analytique. Le calcul de cette contrainte, qui ne peut s'effectuer avec MSC/NASTRAN, s'effectue beaucoup plus rapidement qu'avec la méthode de Monte-Carlo généralement employée pour effectuer celui-ci.
- Le calcul des marges de sécurité associées aux éléments finis composant le modèle. Cette valeur permet à l'utilisateur de détecter rapidement et facilement quels sont les endroits où une rupture risque de se produire.
- La génération de résultats sous différents formats (fichiers ASCII, universels et HTML) qui facilitent l'analyse des résultats.

En ce qui a trait à l'amélioration de l'efficacité, la comparaison de la rapidité de calcul entre la méthode développée dans le cadre de ce projet de maîtrise et MSC/NASTRAN démontre une amélioration très significative à ce niveau. En effet, le temps de calcul a été réduit par un facteur pouvant atteindre 100. Cette amélioration de la performance, causée simplement par une ré-écriture des équations, ne s'effectue aucunement au détriment de la précision des résultats.

Comme ce fut démontré au chapitre 5, les résultats générés par l'algorithme se comparent avantageusement à ceux obtenus par MSC/NASTRAN. En effet, les écarts relatifs absolus entre les valeurs générées par l'algorithme et celles calculées par MSC/NASTRAN sont la plupart du temps inférieurs à 1%.

Cette comparaison effectuée afin de valider l'algorithme démontre clairement que ce dernier représente une approche efficace afin d'analyser les structures concernées par ce projet de recherche.

Perspectives

Les perspectives regroupent deux points, soient les aspects du travail de recherche qui pourraient être améliorés ainsi que les développements éventuels qui pourraient être effectués.

Les aspects qui pourraient être améliorés sont les suivants :

- Modifier la stratégie utilisée afin de coder l'algorithme analytique en ayant pour objectif de réduire le nombre de calculs identiques et répétitifs. Cette optimisation du nombre d'opérations mathématiques réduirait significativement le temps requis pour calculer les valeurs efficaces analytiquement.
- Permettre à l'utilisateur de spécifier des valeurs critiques pour les différentes variables afin que l'algorithme puisse automatiquement détecter les valeurs supérieures à ce niveau critique.

Les développements éventuels à ce projet de maîtrise pourraient être les suivants :

- Adapter la méthode pour plusieurs types d'excitations aléatoires. En effet, il pourrait être utile de calculer la réponse d'une structure excitée aléatoirement par une force appliquée en un point quelconque. Les modifications de l'algorithme afin de tenir compte de ce type d'excitation sont mineures
- Ajouter une interface graphique afin de faciliter la création du fichier usager. Comme celui-ci contient des informations précises qui doivent être spécifiées dans un ordre donné et sous un format rigide, l'utilisateur peut facilement commettre des erreurs lors de la création de ce fichier.
- Comme ce logiciel s'intéresse principalement à l'analyse structurale des satellites lors de leur mise en orbite, il serait intéressant d'être en mesure de calculer la réponse de la structure à l'excitation aléatoire acoustique qui se produit lors du lancement. L'ajout de cette capacité

pourrait être très simple, même si la méthode de calcul pour ce type d'excitation est différente de celle utilisée dans ce mémoire. Cet ajout s'inscrit plutôt dans l'objectif de concevoir un outil informatique capable d'analyser complètement la réponse de la structure d'un satellite lors de sa mise en orbite.

ANNEXE

Annexe A

Fichier usager type

Voici un fichier usager type employé par l'algorithme développé par ce projet de maîtrise :

```
$ TITLE LINE
MODEL_6 ALL ELEMENTS
$
$
$ FREQUENCY RANGE FOR RESULTS ESTIMATION (IN HZ.)
1,3500
$ NUMBER OF LOAD CASE (OR DIRECTION)
1
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ FIRST LOAD CASE $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ EXCITATION COORDINATE SYSTEM DEFINITION
$ 1 = NASTRAN BASIC
$ 2 = NASTRAN LOCAL
$ 3 = USER DEFINED
1
$
$ NASTRAN LOCAL COORDINATE SYSTEM LABEL (0 = BASIC)
0
$ USER DEFINED ORIENTATION VECTOR
1,0,0
$ EXCITATION AXIS (X,Y,Z) IF A NASTRAN CS IS USED
X
$
$
$ PSD SCALE FACTOR
1
$
$ PSD DEFINITION
$ FIRST LINE : NUMBER OF SEGMENTS
$ EACH SUBSEQUENT LINE IS A SEGMENT DEFINED AS:
$ F1,PSD1,F2,PSD2, SLOBE (DB/OCT)
$ ENTER -99 FOR UNKNOWN DATA
```

```

$ NUMBER OF SEGMENTS
9
$ PSD SEGMENTS DEFINITION
1.,100.,500.,500.,-99
500.,500.,800.,500.,-99
800.,500.,1200.,1000.,-99
1200.,1000.,1500.,1000.,-99
1500.,1000.,2000.,700.,-99
2000.,700.,2200.,500.,-99
2200.,500.,2700.,500.,-99
2700.,500.,3200.,200.,-99
3200.,200.,3500.,200.,-99
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ FREQUENCY DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ NUMBER OF MODES FOR THE ANALYSIS
$ ALL = ALL MODES IN OP2 FILE
$ 1 = SPECIFY NUMBER OF MODES (LMODES)
$ 2 = SPECIFY FREQUENCY RANGE (LFREQ,HFREQ)
$ 3 = SINGLE RANGE OF MODES NUMBERS
1
$
$ MODE SPECIFICATION
$
30
$
$ INCLUDE RIGID BODY MODES (0=OFF OR 1=ON)
1
$
$ INCLUDE RESIDUAL FLEXIBILITY EFFECTS (0=OFF OR 1=ON)
0
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ DAMPING DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ FIRST LINE: NUMBER OF SEGMENTS
$ EACH SUBSEQUENT LINE IS A SEGMENT DEFINED AS:
$ FREQ, Q
29
49.89430,100.0
90.67029,125.0
124.3867,90.0
198.3886,10.0
287.4331,20.0
353.8312,15.0
355.6046,70.0
546.8180,80.0
686.0300,100.0
756.1655,160.0
759.7988,30.0
1030.826,80.0
1374.140,35.0
1394.144,55.0

```

```

1394.168,20.0
1488.408,60.0
1693.024,65.0
2004.651,89.0
2026.101,35.0
2102.096,70.0
2537.138,110.0
2610.500,45.0
2728.105,15.0
2748.237,40.0
2986.273,65.0
3132.514,78.0
3211.080,78.0
3332.424,20.0
3406.297,40.0
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$   ANALYSIS PARAMETER   $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$ METHOD TO ESTIMATE PEAK/RMS RATIO
$   1 = USER-DEFINED RATIO
$   2 = CONFIDENCE LEVEL (PERCENT)
1
$
$   PEAK/RMS RATIO DATA
$
2
$
$   INTEGRATION SCHEME
$   1 = ANALYTICAL
$   2 = NUMERICAL
$   3 = NUMERICAL (IMPROVED METHOD)
$
1
$
$   NUMERICAL INTEGRATION TOLERANCE
$
0.001
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$   MARGIN OF SAFETY     $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$   USER-DEFINED RATIO FOR APPROX SOLUTION
$
3.25
$
$   PEAK/RMS RATIO FOR EXACT SOLUTION
$   CONFIDENCE LEVEL (PERCENT)
$
99.87
$
$   METHOD FOR EXACT VON MISES CALC
$   1 = MONTE CARLO

```

```

$      2 = SEGALMAN
$
2
$
$
$  NUMBER OF SAMPLES FOR MONTE CARLO
$
200000
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$      OUTPUT REQUEST      $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$  NUMBER OF RESULTS REQUESTED
10
$  DEFINITION OF RESULTS
ACCE(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0 COMP=ALL SF=1 OVLY=N)
  2
DISP(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0 COMP=ALL)
  2
VELO(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0 COMP=ALL)
  2
SPCF(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  2
MPCF(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  ALL
ELFO(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  4,5
GPFO(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  2
STRA(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  ALL
STRE(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  4
MSFY(PEAK=1,0,0 PSD=0,0,0)
  2
$
$
$  For MSFY in last section, number are associated with
$  stress cases and not with group.
$
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$  STRESS CASE DEFINITION IF RESULT IS MSFY $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$  NUMBER OF STRESS CASES
2
$  NUMBER OF THE STRESS CASE (LABEL ARE NEGATIVE FOR STRESS CASES)
2
$
$TITLE OF THE STRESS CASE
  PREMIER STRESS CASE
$ GROUP LABEL FOR THIS STRESS CASE
4
$
$

```

```

$ PARAMETERS FOR THE STRESS CASE
$
$ EXACT SOLUTION TOGGLE (0=OFF 1=ON)
$
  1
$
$ MARGIN OF SAFETY CUTOFF FOR EXACT SOLUTION COMPUTATION
$
1E+2
$
$ FAILURE MODEL
$
$ This is a descriptor that characterizes the material allowable and
the
$ factor of safety. Maximum number of character: 15
$
YIELD
$
$ PROCESSING INFORMATION
$
$ format: Factor of safety, Margin of safety cut off (for printing) (%)
$         allowable stress, Sorting option.
$
$ Sorting option:
$
$   o 0 : Sort by increasing NASTRAN element ID
$   o 1 : Sort by increasing margin of safety
$   o 2 : Two tables are generated. One sorted by ID and one sorted by
$         margin of safety
$
1.5,1.0E+50,1500,0
$
$ NUMBER OF THE STRESS CASE (LABEL ARE NEGATIVE FOR STRESS CASES)
6
$
$TITLE OF THE STRESS CASE
DEUXIEME STRESS CASE
$ GROUP LABEL FOR THIS STRESS CASE
  3
$
$
$ PARAMETERS FOR THE STRESS CASE
$
$ EXACT SOLUTION TOGGLE (0=OFF 1=ON)
$
  1
$
$ MARGIN OF SAFETY CUTOFF FOR EXACT SOLUTION COMPUTATION
$
100
$
$ FAILURE MODEL
$
$ This is a descriptor that characterizes the material allowable and
the
$ factor of safety. Maximum number of character: 15
$

```



```

YIELD
$
$ PROCESSING INFORMATION
$
$ format: Factor of safety, Margin of safety cut off (%)
$         allowable stress, Sorting option.
$
$ Sorting option:
$
$   o 0 : Sort by increasing NASTRAN element ID
$   o 1 : Sort by increasing margin of safety
$   o 2 : Two tables are generated. One sorted by ID and one sorted by
$         margin of safety
$
1.5,1.0E+2,2000,0
$
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ GROUP DEFINITION $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$
$NUMBER OF GROUPS
6

$GROUP LABEL
1
$TITLE
ACCE
$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)
1
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
1
$RANGES
100

$GROUP LABEL
2
$TITLE
DISP
$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)
1
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
4
$RANGES
201
300
320
330

$GROUP LABEL
3
$TITLE
VELO

```

\$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)

1

\$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW

7

\$RANGES

1000

30

201

300

92

110

308

\$GROUP LABEL

4

\$TITLE

STRESS and STRAINS

\$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)

2

\$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW

18

\$RANGES

2

6

10

11

18

20

23

30

34

40

43

60

69

70

79

80

94

100

\$GROUP LABEL

5

\$TITLE

FORCE

\$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)

2

\$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW

6

\$RANGES

2,8

10,15

11

18

20

23

```

$GROUP LABEL
6
$TITLE
FORCE
$CONTENTS OF GROUP (1=NODES, 2=ELEMENTS)
2
$NUMBER OF RANGES TO FOLLOW
1
$RANGES
232

$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$ XY PLOTTING OPTIONS $
$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$
$
$
$ START FREQUENCY
1
$
$
$ END FREQUENCY
3500
$
$
$ INTERMEDIATE FREQUENCY OPTION
$
$ 1 = FREQ1
$ 2 = FREQ2
$ 3 = FREQ3
$
3
$
$ NUMBER OF FREQUENCY INTERVALS (FREQ 1)
$ NUMBER OF LOG INTERVALS (FREQ 2)
$ NUMBER OF FREQUENCIES PER RANGE (FREQ3)
$
100
$
$
$ CLUSTER (FREQ3)
$
1
$
$ TYPE (FREQ3) (0 = LINEAR, 1 = LOG)
$
1
$
$
$ REAL DATA FILTER (0 = OFF, 1 = ON)
$
0
$
$ REAL DATA VALUE
$
1E-15

```

\$
\$
\$ END OF FILE

Bibliographie

- [1] PETYT, Maurice, *Introduction to finite element vibration analysis*, Cambridge University Press, Great Britain, 1990
- [2] IMBERT, J.F., *Analyse des structures par éléments finis*, Cépaduès-Éditions, 3ième édition, Toulouse, 506 p., 1991
- [3] HANSTEEN, O.E., BELL, D., *On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics*, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 7, p. 405-411, 1979
- [4] BENDAT, J.S., PIERSON, A.G. (1980), *Engineering applications of correlation and spectral analysis*, New-York, John Wiley & Sons, 302 p.
- [5] CHEN, M-T., ALI, A., *An efficient and robust integration technique for applied random vibration analysis*, Computers & structures, vol. 66, no. 6, p. 785-798, 1998
- [6] DER KIUREGHIAN, A., *Structural Response to Stationnary Excitation*, Journal of Engineering Mechanics division, vol. 106, no. EM6, p. 1195-1213, 1980
- [7] SPANOS, P-T. D., *Spectral Moments Calculation of Linear System Output*, Journal of Applied Mechanics, vol. 50, p.901-903, décembre 1983.
- [8] SPANOS, P-T. D., *An Approach to Calculating Random Vibration Integrals*, Journal of Applied Mechanics, vol. 54, p.409-413, juin 1987
- [9] JIAHAO, L., *A fast CQC algorithm of DSP matrices for random seismic responses*, Computers & structures, vol. 44, no. 3, p. 683-687, 1992
- [10] DER KIUREGHIAN, A., NAKAMURA, Y., *CQC modal combination rule for high-frequency modes*, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 22, p. 943-956, 1993
- [11] HARICHANDRAN, R. S., *Random vibration under propagating Excitation : closed-form solutions*, Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, no. 3, p. 575-585, 1992
- [12] HARICHANDRAN, R. S., *An efficient, adaptive algorithm for large-scale random vibration analysis*, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 22, p. 151-165, 1993

-
- [13] MSC/NASTRAN, *Quick Reference Guide version 70*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 1252 p., 1997
- [14] MSC/NASTRAN, *DMAP Module Dictionnary version 68*, The MacNeal-Schwendler Corporation, 386p. 1994
- [15] PIESSENS, R., DONCKER-KAPENGA, E., UBERHUBER, C.W. and KAHANER, D.K., *Quadpack, A subroutine package for Automatic Integration*, Springer-Verlag, 1983
- [16] OUELLET, G., *Calcul 2*, Ste-Foy, Les éditions Le Griffon d'argile, 310 p., 1982
- [17] PROULX, P., *GIN 220 Analyse et techniques numériques* (note de cours), Université de Sherbrooke, 148 p., 1993
- [18] DAVENPORT, S.M., HUDDLESTON, R.E., SHAMPINE, L.F., *SLATEC Common Mathematical library*, version 4.1 juillet 1993, <http://www.netlib.org/slatec>
- [19] HARICHANDRAN, R. S., CHEN, M.-T., *Statistics of the von Mises stress response for structures subjected to random excitations*, Shock and Vibration, vol. 5, p.13-21, 1998
- [20] SEGALMAN, D., REESE, G., FIELD, R. Jr. et FULCHER, C., *Estimating the Probability Distribution of von Mises Stress for Structures Undergoing Random Excitation*, Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, vol. 122, p. 42-48, 2000
- [21] FISHMAN, G.S., *Concepts and methods in discrete event digital simulation*, New-York, John Wiley & Sons, 385 p., 1973
- [22] ANDERSON, E., BAI, Z., BISHOF, C., BLACKFORD, S., DEMMEL, J., DONGARRA, J., DU CROZ, J., GREENBAUM, A., HAMMARLING, S., MCKENNEY, A., SORENSEN, D., *LAPACK User's guide, 3rd edition*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphie, 1999
- [23] BROWN, B., LOVATO, J. RUSSEL, K., *ranlib.f*, <http://www.netlib.org/random/ranlib.f.tar.gz>, basé sur COTÉ, S., L'ÉCUYER, P., *Implementating a Random Number Package with Splitting Facilities*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 17, p. 98-111, 1991
- [24] SEGALMAN, D., REESE, G., FIELD, R. Jr. et FULCHER, C., *An efficient method for calculating RMS von Mises stress in a random vibration environment*, 16th International Modal Analysis Conference (IMAC), 3-5 février 1998, Santa Barbara, Californie

-
- [25] BROWN, B., LOVATO, J. RUSSEL, K., *DCDFLIB: Library of Fortran Routines for Cumulative Distribution Functions, Inverses, and other parameters*, University of Texas, 1994, basé sur CODY, W.D., *ALGORITHM 715: SPECFUN – A portable FORTRAN Package of Special Function Routine and Test Drivers*, ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 19, p. 22-32, 1993
- [26] WILLIAMS, T., KELLEY, C., RUSSELL, L., KOTZ, D., CAMPBELL, J., ELBER, G. WOO, A., *gnuplot, version 3.7*, <http://www.gnuplot.org> , 1999
- [29] RAO, S.S., *Mechanical vibrations*, 3rd edition, New-York, Addison-Wesley, 912 p., 1995
- [30] BAZERGUI, A., BUI-QUOC, T., BIRON, A., McINTYRE, G., LABERGE, C., *Résistance des matériaux*, Montmagny 2^{ème} édition, Éditions de l'école Polytechnique de Montréal, 595 p., 1993
- [31] AMIOT, E., *Introduction aux probabilités et à la statistiques*, Louiseville, Gaëtan Morin éditeur, 478 p., 1990
- [32] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., *Dynamics of structures*, New-York, McGraw-Hill, 634 p., 1975
- [33] THOMSON, W.T., DAHLEH, M.D., *Theory of vibration with applications*, Upper Saddle River, Prentice Hall, 524 p., 1998